

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA  
CENTRO UNIVERSITARIO DE LOS VALLES



“ INFLACIÓN GRAVITOELECTROMAGNÉTICA  
DESDE UNA TEORÍA ESCALAR-TENSORIAL DE  
NORMA EN UNA GEOMETRÍA DE  
WEYL-INTEGRABLE”

Tesis que para obtener el título de Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas con  
orientación en Matemáticas

Presenta:

**M.C. Mariana Sarahí Montes Navarro**

Director:

**Dr. José Edgar Madriz Aguilar**

Ameca, Jalisco, Julio de 2018



**UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA**  
CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIA  
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

Ameca, Jalisco, a 6 de Julio de 2018.

**Junta Académica del Programa  
Doctorado en Ciencias Físico-Matemáticas  
del Centro Universitario de los Valles**

Presente:

En mi carácter de Director del trabajo recepcional titulado: **INFLACIÓN GRAVITOELECTROMAGNÉTICA DESDE UNA TEORÍA ESCALAR-TENSORIAL DE NORMA EN UNA GEOMETRÍA DE WEYL-INTEGRABLE**, que presenta la Mtra. **Mariana Sarahí Montes Navarro** con código **206658393** expongo que lo he revisado y que a mi juicio cumple con todos los requisitos metodológicos y de contenido, para que pueda ser sometido al examen recepcional correspondiente al Doctorado en Ciencias Físico-Matemáticas con Orientación en Matemáticas.

Por lo antes expuesto, me permito emitir el presente oficio de liberación del trabajo recepcional, con la finalidad de que pueda llevarse a cabo la defensa del mismo.

Atentamente

**Dr. José Edgar Madriz Aguilar**  
Profesor-Investigador Titular A  
Universidad de Guadalajara



**UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA**  
CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIA  
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

Ameca, Jalisco, a 6 de Julio de 2018.

**Junta Académica del Programa  
Doctorado en Ciencias Físico-Matemáticas  
del Centro Universitario de los Valles**

Presente:

En nuestro carácter de lectores de tesis del trabajo recepcional titulado: **INFLACIÓN GRAVITOELECTROMAGNÉTICA DESDE UNA TEORÍA ESCALAR-TENSORIAL DE NORMA EN UNA GEOMETRÍA DE WEYL-INTEGRABLE**, que presenta la Mtra. Mariana Sarahí Montes Navarro con código 206658393 exponemos que lo hemos revisado y que a nuestro juicio cumple con todos los requisitos metodológicos y de contenido, para que pueda ser turnado y programado para el examen recepcional correspondiente al Doctorado en Ciencias Físico-Matemáticas con Orientación en Matemáticas.

Atentamente

*Andrés Germán Sandoval*

---

**Dr. Andrés García Sandoval**  
Profesor-Investigador Titular A  
Universidad de Guadalajara

*Emilia Fregoso Becerra*

---

**Dra. Emilia Fregoso Becerra**  
Profesor-Investigador Titular A  
Universidad de Guadalajara

*J. Antonio Licea S.*

---

**Dr. Juan Antonio Licea Salazar**  
Profesor-Investigador Titular A  
Universidad de Guadalajara

*Américo Peraza Álvarez*

---

**Dr. Américo Peraza Álvarez**  
Profesor-Investigador Titular A  
Universidad de Guadalajara



# UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

CENTRO UNIVERSITARIO DE LOS VALLES

COORDINACIÓN DE DOCTORADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Oficio DCFM/062/2018

**Mtro. Abraham Vega Tapia.**  
**Coordinador Control Escolar**  
**CUVALLES**

## PRESENTE

Por este medio se hace de su conocimiento que el trabajo de tesis presentado por el **MTRA. MARIANA SARAHÍ MONTES NAVARRO** con código 206658393 para optar por el grado de Doctor en Ciencias Físico Matemáticas con Orientación en Matemáticas con el tema titulado: **“INFLACIÓN GRAVITOELECTROMAGNÉTICA DESDE UNA TEORÍA ESCALAR-TENSORIAL DE NORMA EN UNA GEOMETRÍA DE WEYL-INTEGRABLE”**

**SÍ CUMPLE** con los requerimientos exigidos por la Junta Académica para su presentación en examen de grado.

Por tal motivo, le informamos que el examen de grado se efectuará el día 24 de Julio del 2018 a las 12.00 hrs en la sala C-14, ubicado en el edificio C. Al respecto le solicitamos atentamente la elaboración del acta correspondiente.

Asimismo le comunico sobre la designación del jurado de examen de grado.

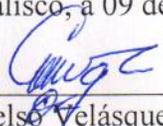
- **Dr. Andrés García Sandoval. (Presidente)**
- **Dra. Emilia Fregoso Becerra. (Secretario)**
- **Dr. José Edgar Madriz Aguilar (Vocal).**
- **Dr. Américo Peraza Álvarez (Vocal)**
- **Dr. Juan Antonio Licea Salazar. (Vocal)**

Sin otro particular aprovechamos la oportunidad para reiterarle mi atenta y distinguida consideración.

ATENTAMENTE

**“PIENSA Y TRABAJA”**

Ameca, Jalisco, a 09 de Julio de 2018

  
Dr. Celso Velásquez Ordóñez  
Coordinador de Doctorado en  
Ciencias Físico Matemáticas.

  
Vo.Bo. Dr. Celso Goyas Mejía  
Coordinador de Posgrado  
c.c.p Archivo



UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA  
C. UNIVERSITARIO  
DE LOS VALLES  
Coordinación de Posgrado



UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA  
C. UNIVERSITARIO  
DE LOS VALLES  
Coordinación de Doctorado  
en Ciencias Físico Matemáticas

---

## Agradecimientos

A través de estas líneas quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que con su soporte científico y humano han colaborado en la realización de este trabajo de investigación.

Quiero agradecer muy especialmente a mi tutor y director de tesis el Dr. José Edgar Madriz Aguilar por su acertada orientación y discusión crítica que me ha permitido tener un buen aprovechamiento no sólo en el presente trabajo realizado sino en cada una de las cosas que llevo a cabo desde que he tenido la fortuna de conocerlo. Me ha enseñado con su gran calidad humana y profesionalismo que el principal enemigo del conocimiento no es la ignorancia sino la ilusión de sabiduría y que enseñar no es transferir conocimientos, sino crear la posibilidad de construirlos.

Quiero agradecer a mis padres, María del Socorro Navarro Cisneros y Jesús Montes Ramírez, que cada día me enseñan con su ejemplo que nunca hay que dejar de aprender y que siempre hay que ver el lado positivo de la vida. A mis hermanos, Lupita y Vladimir, los quiero y me enorgullece que logren sus objetivos y los busquen con gran perseverancia. A mi ahijada Yuli que tiene mucho camino aún por recorrer.

Y a todas aquellas personas que han formado y forman parte importante en mi vida, mis abuelos, tíos, primos y todos aquellos que soy afortunada de llamarlos amigos.

Por último quiero agradecer al coordinador del posgrado y al Centro Universitario de los Valles por su ayuda y colaboración en los trámites administrativos así como por las condonaciones de matrícula que me proporcionaron.

A todos ustedes, ¡muchas gracias!

Mariana Sarahí Montes Navarro.

“Ayuda a crecer a los demás  
y cada día tú serás más grande.”

# Índice general

Introducción general . . . . .	4
<b>1. Fundamentos de geometría diferencial</b>	<b>8</b>
1.1. Elementos de Geometría Diferencial . . . . .	8
1.2. Geometría Riemanniana . . . . .	17
1.3. Geometría de Weyl . . . . .	20
1.4. Geometría de Weyl-Integrable . . . . .	23
<b>2. Gravitación</b>	<b>27</b>
2.1. Transformaciones de Lorentz . . . . .	27
2.2. Elementos de relatividad general . . . . .	30
2.3. Teoría escalar-tensorial de la gravedad de Brans-Dicke . . . . .	37
2.4. Teoría gravitoelectromagnética de Kaluza Klein . . . . .	42
<b>3. Cosmología</b>	<b>46</b>
3.1. Modelos homogéneos e isotrópicos del universo . . . . .	47
3.2. Problemas del modelo cosmológico de la gran explosión . . . . .	52
3.3. Escenario inflacionario . . . . .	55
3.4. Modelo cosmológico estándar . . . . .	66
<b>4. Teoría escalar-tensorial de norma en una geometría de Weyl-Integrable</b>	<b>70</b>
4.1. Formalismo . . . . .	73
4.2. Gravitoelectromagnetismo en el frame de Einstein-Riemann . . . . .	75

---

4.3. Modelo de quinta esencia interactuante . . . . .	78
4.4. Escenario inflacionario . . . . .	87
4.5. Conclusiones . . . . .	94

---

## Introducción general

La teoría de la relatividad general de Albert Einstein es una teoría de gravitación en la cual la gravedad se modela mediante la curvatura de Ricci del espacio-tiempo. Matemáticamente ésta teoría es formulada en una geometría Riemanniana. Lo característico de tal geometría es que cuando se transportan campos de vectores a lo largo de curvas tanto abiertas como cerradas, el producto escalar entre ellos se conserva, lo cual significa que ni el ángulo entre dos vectores ni sus normas cambian al hacer el transporte. Este hecho está asociado con la invariancia de las unidades físicas de medición en diferentes puntos del espacio-tiempo, es decir, con reglas rígidas y relojes precisos definidos en cada punto [3].

Sin embargo, en la naturaleza no solo existe el campo gravitacional, sino hay muchos otros campos como por ejemplo campos electromagnéticos. Es del conocimiento general que desde principios de 1900, muchos investigadores han tratado de formular una teoría que describa de manera unificada tanto la gravitación de Einstein como el electromagnetismo de Maxwell. Muchas han sido las propuestas en esta dirección. Las teorías en dimensiones extra conocidas como teorías de Kaluza-Klein compactas son un buen ejemplo de estos intentos de unificación [4, 5].

Henry Weyl, involucrado en este problema de la unificación propuso una extensión de la geometría Riemanniana con el fin de describir gravedad y electromagnetismo dentro de una misma teoría gravitoelectromagnética. En la geometría de Euclides la traslación de un vector paralelamente a lo largo de una trayectoria cerrada conserva tanto su dirección como su longitud. No obstante, en la geometría de Riemann la conexión afín, representada por los símbolos de Christoffel, es no nula, lo que significa que puede haber curvatura presente y por ello la orientación del vector depende del camino recorrido, aunque el ángulo entre vectores que recorren la misma curva se conserve. Weyl se preguntaba porqué había de prevalecer una noción típica de la geometría Euclidiana como era la preservación de la longitud bajo el transporte paralelo. Pensaba Weyl que al fin de cuentas las unidades o patrones de medida (reglas y relojes) solo se manipulan en un mismo punto del espacio-

---

tiempo a la vez. Según esta idea, para medir longitudes y tiempo de un punto a otro el observador debe transportar los instrumentos de medida junto con el mismo. De acuerdo a Weyl, la longitud de un vector único es una noción arbitraria, ya que depende de la unidad de medida que el observador escoja en cada punto del espacio-tiempo. En términos simples para Weyl el preservar la longitud de los vectores bajo transporte paralelo era muy restrictivo y poco natural dado que era más natural una arbitrariedad en las unidades físicas de medición para puntos diferentes del espacio-tiempo. Al eliminar esta condición de preservar las longitudes Weyl formuló una nueva geometría que sorprendentemente no solo explicaba los fenómenos gravitacionales sino también los electromagnéticos. De acuerdo con la teoría física formulada en esa nueva geometría (ahora conocida como geometría de Weyl), ambos fenómenos surgen de una misma fuente, pues en general no se pueden separar gravitación y electromagnetismo de manera única, e incluso fue tomada por algunos como una explicación de porqué el mundo debía ser tetradimensional [3, 4, 5].

Lamentablemente, hubo una objeción contundente por parte de Einstein a la nueva teoría de Weyl. Einstein le hizo saber a Weyl que su teoría implicaba que si tomásemos dos relojes atómicos idénticos en el mismo punto del espacio-tiempo y los trasladásemos por caminos distintos hasta hacerlos coincidir nuevamente en otro punto, marcarían tiempos diferentes y como consecuencia tendrían frecuencias diferentes y sus espectros atómicos serían diferentes. Esta conclusión se hallaba en contradicción con la experiencia empírica, pues observacionalmente los espectros atómicos son estables. A este problema se le conoce en la literatura como el problema del segundo reloj [5].

Weyl se dio cuenta de que la observación de Einstein era correcta, y le tomó casi 10 años el proponer una solución a este problema. La corrección de Weyl a su propia geometría consistía básicamente en proponer que el cambio de longitud de los vectores bajo transporte paralelo fuera gobernado por un campo escalar, y de esta forma se garantizaba que ángulos y longitudes de vectores se preservaban en curvas cerradas si bien no lo hacían en curvas abiertas. Sin embargo, con esto era suficiente para resolver el problema del segundo reloj. Esta nueva modificación se conoce como condición de integrabilidad y por esta razón a la nueva geometría se le conoce como geometría de Weyl-Integrable [4].

---

La desventaja más grande de la geometría de Weyl-Integrable es que con la nueva condición de integrabilidad ya no era posible la aparición del campo electromagnético en la teoría y por ende solo era posible describir la gravedad, motivo por el cuál esta geometría perdió interés en la comunidad científica [6, 7, 8].

Sin embargo, en la actualidad se ha recobrado un gran interés por este tipo de geometría. Se ha mostrado que es posible obtener una nueva formulación de la relatividad general en este fondo geométrico. Más aun, se ha mostrado que tal vez la geometría Riemanniana no es la más apropiada para la formulación de teorías escalares-tensoriales, sino que sería la propia geometría de Weyl-integrable, lo cual lleva a la obtención de una nueva clase de teorías escalares-tensoriales de la gravedad conocidas como teorías escalares-tensoriales geométricas [9, 10, 11, 12]. Es de importancia resaltar que la funcional de acción que describe a este último tipo de teorías no es invariante bajo el grupo de transformaciones de Weyl, como debería esperarse.

En esta tesis construimos un nuevo tipo de teorías escalares-tensoriales-vectoriales de norma de la gravedad, mediante la propuesta una nueva acción invariante. Como resultado obtenemos una nueva teoría de gravitoelectromagnetismo en la cual proponemos un modelo de inflación del universo temprano caracterizado porque las semillas para la formación de estructura no son solo de origen gravitacional sino que además se incorpora de manera natural la semilla para la posterior formación de campos magnéticos cósmicos, cuya evidencia observacional es un hecho. En otras palabras, nuestro modelo a diferencia de la mayoría de los modelos existentes, describe de manera unificada tanto las fluctuaciones gravitacionales como las electromagnéticas durante la inflación del universo temprano, que tuvo lugar aproximadamente entre  $10^{-43}$  *seg* hasta  $10^{-36}$  *seg*. Cabe resaltar también que en nuestra propuesta todos los campos físicos tienen un origen geométrico y no son introducidos de manera fenomenológica. Dicho lo anterior, el presente trabajo de investigación desarrollado en esta tesis está estructurado de la siguiente manera:

- 
- El objetivo del primer capítulo es precisamente es abordar los conceptos y notaciones que son parte del lenguaje matemático fundamental para en el desarrollo de la presente tesis: geometría diferencial.
  - El segundo capítulo estudiamos los aspectos relevantes de la teoría de la relatividad general y de algunas otras teorías de gravitación vinculadas con la idea de unificación entre gravitación y electromagnetismo.
  - En el tercer capítulo introduciremos la idea de una época inflacionaria del universo en épocas tempranas y como ésta fue propuesta para resolver los problemas que presentaba el antiguo modelo cosmológico estándar conocido como de la gran explosión (big bang).
  - Como cuarto se presentan los resultados del presente trabajo de investigación, donde se muestra todo el formalismo y los resultados nuevos.
  - El último capítulo se deja para comentarios finales a manera de conclusiones.

# Capítulo 1

## Fundamentos de geometría diferencial

Todo espacio-tiempo es localmente plano y es localmente descrito por la teoría de la relatividad especial, esto establece el principio de equivalencia. El objeto matemático empleado para la descripción del espacio-tiempo se conoce como variedad diferenciable. De esta manera, en la teoría de la relatividad general de Einstein, la gravedad es descrita como la curvatura local de la variedad, en contraposición con su descripción empleando fuerzas como ocurre en la teoría de gravitación de Newton. Por tanto, si se busca tener una adecuada comprensión de la teoría de la relatividad general y de otras teorías de gravitación, resulta indispensable comenzar con el entendimiento del aparato matemático en el que fueron formuladas, a saber, la geometría diferencial [1].

### 1.1. Elementos de Geometría Diferencial

**Definición 1.1.1.** Dado un espacio topológico  $\mathcal{M}$ , una carta en  $\mathcal{M}$  es un par  $(U, \varphi)$ , donde  $\varphi$  es un mapeo inyectivo desde un subconjunto abierto  $U \subset \mathcal{M}$  a un subconjunto abierto  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ , i.e., un mapeo  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uno a uno. Una carta se suele llamar también sistema coordenado.

---

**Definición 1.1.2.** Dos cartas  $\varphi_1, \varphi_2$  son  $C^\infty$ -relacionadas si ambos, el mapeo

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2) \quad (1.1.1)$$

y su inversa son  $C^\infty$  (figura 1.1). Una colección de cartas  $C^\infty$ -relacionadas tales que en cada punto de  $\mathcal{M}$  se encuentra en el dominio de al menos una carta forma un atlas, denotado por  $\mathcal{A}$ . La colección de todas las cartas  $C^\infty$ -relacionadas forman un atlas maximal.

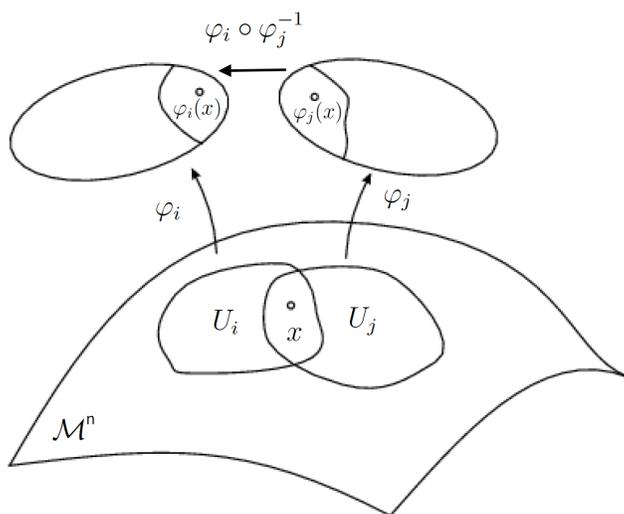


Figura 1.1: Cuando el dominio de dos cartas  $\varphi_i$  y  $\varphi_j$  coinciden, entonces el mapeo  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  debe ser suave.

**Definición 1.1.3.** Si  $M$  es un espacio topológico y  $\mathcal{A}$  es un atlas maximal, el conjunto  $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$  es una variedad diferenciable  $C^\infty$  que denotaremos simplemente como  $\mathcal{M}^n$ , donde  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  es la dimensión de la variedad. Algunas veces se omite el superíndice  $n$  por simplicidad.

Una vez introducido formalmente el concepto de variedad diferenciable, resulta natural definir curvas sobre ésta.

**Definición 1.1.4.** Una **curva** diferenciable en una variedad  $n$ -dimensional  $\mathcal{M}^n$ , es un mapeo

$$\lambda : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}^n \quad (1.1.2)$$

---

que es diferenciable en el intervalo  $I$ .

Es importante resaltar que el concepto de curva es independiente de coordenadas, si embargo, en una carta coordenada  $(U, \varphi)$  tal que  $p \in U \subset \mathcal{M}^n$  la curva  $\lambda$  se expresa como

$$\varphi \circ \lambda = \varphi[\lambda(t)] = [x^1(\lambda(t)), x^2(\lambda(t)), \dots, x^n(\lambda(t))], \quad (1.1.3)$$

donde la variable  $t \in I$  es el parámetro de la curva,  $[x^1, x^2, \dots, x^n]$  denota coordenadas en  $\mathbb{R}^n$ . A esta última expresión se le conoce como ecuación paramétrica de la curva, y algunas veces se denota como  $x^\mu(\lambda)$ , en notación tensorial.

Dada una curva diferenciable en una variedad  $n$ -dimensional es ahora posible introducir campos vectoriales de la siguiente manera.

**Definición 1.1.5.** Se define el espacio tangente en un punto  $p \in \mathcal{M}$ , denotado por  $T_p(\mathcal{M})$

$$T_p(\mathcal{M}) = \left\{ \bar{V}_p \mid \bar{V} = \frac{d}{d\lambda} \Big|_p, p \in \mathcal{M} \right\}$$

que es el conjunto de todos los vectores tangentes a  $p$ .

De igual manera definimos el espacio dual de  $T_p(\mathcal{M})$ , es decir, el espacio definido sobre  $T_p(\mathcal{M})$  de la siguiente forma.

**Definición 1.1.6.** Se define el espacio cotangente en un punto  $p \in \mathcal{M}$ , denotado por  $T_p^*(\mathcal{M})$

$$T_p^*(\mathcal{M}) = \{ \tilde{\omega} : T_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R} \mid \tilde{\omega} \text{ es lineal} \}$$

que es el conjunto de todos los vectores cotangentes a  $p$ , también conocidos como 1-formas.

Equipamos cada espacio tangente en una variedad diferenciable con un producto interior. Esto permite que se definan nociones métricas como longitud de curvas, ángulos y curvatura entre otras cosas.

**Definición 1.1.7.** Definimos el **producto interno** por la función bilineal

$$g : T_p(\mathcal{M}) \times T_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\bar{U}, \bar{V}) \mapsto g(\bar{U}, \bar{V}) \quad (1.1.4)$$

que cumple con las siguientes propiedades

i.  $g$  es simétrica:  $g(\bar{U}, \bar{V}) = g(\bar{V}, \bar{U})$ ,

ii.  $g$  es no degenerada:  $g(\bar{U}, \bar{V}) = 0 \forall \bar{V} \in T_p(M)$  sii  $\bar{U} = 0$ .

Si además  $g$  es definida positiva,

$$g(\bar{U}, \bar{V}) \geq 0, \quad \forall \bar{U}, \bar{V} \in T_p(\mathcal{M}) \quad (1.1.5)$$

entonces  $g$  es llamada Riemanniana, de lo contrario pseudo Riemanniana ó semi-Riemanniana

**Definición 1.1.8.** La signatura de la métrica es la diferencia entre los eigenvalores positivos y negativos. Si en una variedad  $n$ -dimensional la signatura es  $n$  entonces  $g$  es Riemanniana, mientras que si la signatura es  $\pm(n-1)$  entonces  $g$  es Lorentziana.

Los signos de cada componente  $g$  ordenados de izquierda a derecha de una métrica de signatura Riemanniana son de la forma  $(+, +, +, \dots, +)$  ó  $(-, -, -, \dots, -)$ , de una signatura semi-Riemanniana  $(+, +, -, \dots, +, -, +, -)$  y de una signatura Lorentziana  $(+, -, -, \dots, -)$  ó  $(-, +, +, \dots, +)$ .

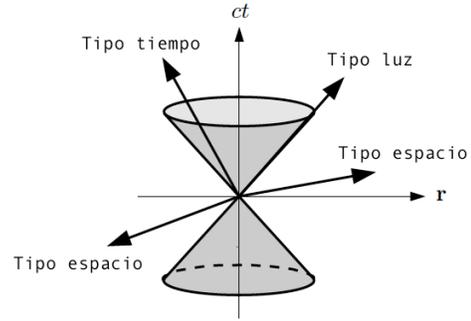


Figura 1.2: Cono de luz.

**Definición 1.1.9.** Sea  $\mathcal{M}$  una variedad diferenciable y  $g$  una métrica, el par  $(\mathcal{M}, g)$  es llamado variedad Riemanniana si  $g$  es de signatura Riemanniana, semi-Riemanniana si  $g$  es semi-Riemanniana o Lorentziana si  $g$  es Lorentziana.

Uno de los principios fundamentales de la teoría de la relatividad especial es que la velocidad de la luz en el vacío es una constante  $c$ . Si consideramos una fuente de luz, esta emite fotones de manera isotrópica formando una esfera cuyo radio es la distancia que recorre la luz en un tiempo  $dt$  esto es  $cdt$ , por otro lado, el radio de una esfera arbitraria de radio  $dR$  es  $dR^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ , por tanto la ecuación que describe una esfera de luz es de la forma

$$c^2 dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.1.6)$$

Esta ecuación no es única, sino que tenemos dos posibles opciones  $dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2 = 0$  y  $c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0$ . Sin embargo, si consideramos la ecuación (1.1.6) como un elemento diferencial de línea 4-dimensional

$$ds^2 = \mp c^2 dt^2 \pm dx^2 \pm dy^2 \pm dz^2 \quad (1.1.7)$$

tenemos la descripción de un cono de luz (figura 1.2).

Todos los vectores no nulos  $\bar{V} \in T_p(\mathcal{M})$ , donde  $\mathcal{M}$  es una variedad Lorentziana de signatura  $(+, -, -, \dots, -)$ , se clasifican de la siguiente manera

$$\begin{array}{ll} \text{Tipo tiempo} & \text{si } g(\bar{V}, \bar{V}) > 0, \\ \text{Causal} & \text{si } g(\bar{V}, \bar{V}) \geq 0, \\ \text{Nulo o tipo luz} & \text{si } g(\bar{V}, \bar{V}) = 0, \\ \text{Tipo espacio} & \text{si } g(\bar{V}, \bar{V}) < 0. \end{array}$$

El conjunto de todos los vectores tipo luz  $L_p \in T_p(\mathcal{M})$  forman la estructura del cono de luz o estructura causal en  $p$  y clasifican los eventos espacio-temporales en tres categorías distintas: eventos en el cono de luz futuro de  $p$ , eventos en el cono de luz pasado de  $p$  y todos los demás eventos que se encuentran fuera de los conos de  $p$ , y que nunca afectarán ni podrán ser afectados causalmente por lo que sucede en  $p$ .

Otro punto importante a tratar, es que el principio de covariancia general establece que las leyes de la física no pueden depender del sistema de coordenadas, sin embargo, los términos cinéticos que involucran derivadas parciales de campos vectoriales y tensoriales no satisfacen dicha condición. A manera de ejemplificar esta situación, consideremos el caso de un campo vectorial  $A_\mu$ . De la transformación de coordenadas

$$x^\mu \rightarrow y^\mu = y^\mu(x^\alpha) \quad (1.1.8)$$

no es difícil mostrar que

$$\tilde{A}_{\alpha,\beta}(y) = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} A_{\mu,\nu}(x) + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} A_\mu(x) \quad (1.1.9)$$

que es un tensor si y sólo si

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} = 0 \quad (1.1.10)$$

es decir cuando  $y^\sigma(x^\mu)$  es una transformación lineal de coordenadas. Para remediar esta situación, se define una nueva derivada que llamamos derivada covariante.

---

**Definición 1.1.10.** Sea  $\gamma(\lambda)$  una curva definida en  $\mathcal{M}$ , el campo vectorial tangente definido naturalmente en ella es  $\frac{d}{d\lambda} \in T_{\gamma(\lambda)}(\mathcal{M})$ , sea  $\overline{W}(\lambda) \in T_{\gamma(\lambda)}(\mathcal{M})$  otro campo vectorial. Se define la **derivada covariante** del campo  $\overline{W}(\lambda)$  respecto al campo  $\frac{d}{d\lambda}$  por

$$\frac{D\overline{W}}{d\lambda} \equiv \nabla_{\frac{d}{d\lambda}} \overline{W}(\lambda). \quad (1.1.11)$$

En una carta coordenada tenemos

$$\nabla_{\frac{d}{d\lambda}} \overline{W} = \omega_{;\beta}^{\sigma} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} \partial_{\sigma} \quad (1.1.12)$$

donde  $\omega_{;\beta}^{\sigma} = \omega_{,\beta}^{\sigma} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma} \omega^{\alpha}$ . A las cantidades  $\Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma}$  se les llama **componentes de conexión** o símbolos de Christoffel, respecto a la base coordenada  $\{\partial_{\mu}\}$ . Al par  $(\mathcal{M}, \Gamma)$  se le llama variedad afinmente conectada. Nótese que la presencia de estas componentes en la derivada covariante de un tensor garantiza que esta derivada también transformará como un tensor de acuerdo a la definición. Aquí es importante aclarar que en general las componentes de conexión  $\Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma}$  no son las componentes de un tensor del tipo (1,2) a menos de que contemos con una transformación lineal de coordenadas en la variedad.

Para entender la interpretación geométrica de las componentes de conexión veamos lo siguiente. La derivada parcial del campo vectorial  $\overline{W}$  respecto a  $x^{\alpha}$  resulta ser

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left( \omega^{\beta} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \right) = \frac{\partial \omega^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} + \omega^{\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^{\beta} \partial x^{\alpha}} \quad (1.1.13)$$

Obsérvese que el término con segunda derivada hace que  $\frac{\partial \overline{W}}{\partial x^{\alpha}}$  ya no pertenezca al espacio tangente. La conexión  $\Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma}$  se interpreta como la responsable de proyectar la derivada del campo sobre el espacio tangente  $T_p(\mathcal{M})$ .

La derivada covariante es de gran importancia en la geometría diferencial y en la física. Sin embargo no es la única derivada que puede definirse. Existe una derivada que nos permite definir formalmente simetrías en la variedad como homogeneidad, isotropía, etc. Para introducir esta nueva derivada comenzaremos considerando una transformación local de coordenadas.

Consideremos una transformación que lleva un punto  $p$  en coordenadas locales  $x_p^a$  a otro punto  $q$  con coordenadas  $\tilde{x}_q^a$  en el entorno de  $p$ . Como los puntos están cercanos,

---

entonces

$$\tilde{x}_q^a = x_p^a + \epsilon \xi^a(x_p) \quad \epsilon \ll 1 \quad (1.1.14)$$

donde  $\xi^a$  es un campo vectorial conocido como campo de killing. Esta transformación se interpreta como que todo punto de la variedad es arrastrado en la dirección local de  $\xi$ , por una cantidad  $\epsilon$ . Además, induce una transformación que lleva a todo objeto geométrico en  $p$  a  $q$ . Esto nos permite introducir la siguiente derivada.

**Definición 1.1.11.** Definimos la derivada de Lie en la dirección de  $\xi$  de la siguiente manera

$$\mathcal{L}_\xi T_{(p)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{T_{(p)} - T_{(q)}}{\epsilon}. \quad (1.1.15)$$

Como mencionamos con anterioridad, la derivada de Lie toma un papel importante para el estudio de simetrías de variedades, formalmente se tiene lo siguiente.

**Definición 1.1.12.** Decimos que un tensor cualquiera  $T$  es invariante bajo la transformación generada por  $\xi$  si

$$\mathcal{L}_\xi T = 0. \quad (1.1.16)$$

Esta expresión se conoce como ecuación de killing. En el caso particular en que el tensor sea el tensor métrico de la variedad, entonces la transformación se denomina una isometría, es decir, la transformación infinitesimal

$$\bar{x}^a = x^a + \epsilon \xi^a \quad (1.1.17)$$

es una isometría si se satisface

$$\mathcal{L}_\xi g = 0. \quad (1.1.18)$$

El número máximo de vectores de Killing permitido en una variedad está dado por el número de asignaciones independientes que podamos hacer de  $\xi_a$  y de  $\xi_{a,b}$  en un punto. En  $n$  dimensiones hay  $n$  valores para  $\xi_a$  y  $\frac{1}{2}n(n-1)$  para  $\xi_{a,b}$ . Por consiguiente, el número máximo de vectores de killing en una variedad  $n$ -dimensional es de  $\frac{1}{2}n(n+1)$ .

**Definición 1.1.13.** Una variedad con el número máximo permitido de vectores de Killing se denomina variedad maximalmente simétrica y satisface las siguientes relaciones

---

a. La curvatura escalar es constante,

$$R = \kappa n(n - 1), \quad \kappa \in \mathbb{R} \quad (1.1.19)$$

b. El tensor de Ricci es proporcional al tensor métrico

$$R_{ab} = \frac{R}{n} g_{ab} \quad (1.1.20)$$

c. El tensor de Riemann está dado por

$$R_{abcd} = \kappa (g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \quad (1.1.21)$$

Considerando esto, si tuviésemos un variedad de tres dimensiones homogénea e isotrópica, tal como ocurre en nuestro universo a escala cosmológica, tendríamos 6 vectores de Killing que es el número máximo permitido. Por tanto se estaría exigiendo que el espacio sea maximalmente simétrico, situación que retomaremos más adelante en el capítulo 3.

Como se mencionó anteriormente, el establecimiento del campo de conexiones es lo que nos permite efectuar la diferenciación de un campo vectorial o tensorial y a partir de estas operaciones obtenemos un conjunto de tensores que describen las características y propiedades del espacio. Particularmente, esta construcción de la derivada covariante del campo de vectores nos permite definir transporte paralelo a lo largo de una curva en una variedad.

**Definición 1.1.14.** Se dice que un campo vectorial  $\bar{V}$  es **transportado paralelamente** a lo largo de una curva parametrizada  $\gamma = \gamma(\lambda)$  si

$$\frac{D}{d\lambda} \bar{V} = 0. \quad (1.1.22)$$

Partiendo de un vector  $\bar{V}_0 \in T_{\gamma(\lambda_0)}(\mathcal{M})$  se puede resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (1.1.22) con  $\bar{V}(\lambda_0) = \bar{V}_0$ , por ello tiene sentido hablar del transporte paralelo de un vector a lo largo de una curva.

---

En particular, podríamos preguntarnos si el propio campo de vectores definidos sobre la curva al ser transportado a lo largo de ésta se mantiene paralelo con la conexión elegida, esto es, si

$$\frac{D}{d\lambda} \left( \frac{d}{d\lambda} \right) = 0. \quad (1.1.23)$$

En ese caso diremos que la curva es una **geodésica afín** para dicha conexión. Si escribimos el campo vectorial en una carta coordenada y desarrollamos la expresión se llega de forma inmediata a la ecuación

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0, \quad (1.1.24)$$

cuya solución nos determina la curva deseada

$$\gamma(\lambda) = (x_1(\lambda), \dots, x_n(\lambda)). \quad (1.1.25)$$

Existen otro tipo de geodésicas llamadas geodésicas métricas, si consideramos el elemento diferencial de línea

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.1.26)$$

se obtiene la ecuación

$$s = \int \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda. \quad (1.1.27)$$

Se puede demostrar que al extremizar esta funcional se verifica la ecuación (1.1.24) en este caso conocida como ecuación de una geodésica métrica.

Las leyes de la física no gravitacionales obedecen las leyes de la relatividad especial en un marco de referencia en caída libre o marco geodésico, es decir un marco de referencia cuyo origen de coordenadas se mueve a lo largo de una curva geodésica. Como es posible notar de (1.1.24), esta ecuación preserva su forma algebraica independientemente de la geometría del espacio-tiempo, sólo cambia la manera de determinar  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ . No es difícil ver que en el caso de una geometría no-Riemanniana, los observadores deben también ser definidos en esta geometría. Esto debido a que si se tienen observadores Riemannianos en una geometría no Riemanniana, la ecuación de geodésicas (1.1.24) nos lleva a la existencia de una quinta fuerza, la cual no es física sino ficticia.

---

De la ecuación (1.1.22) podemos notar no solo que la conexión nos da un modo natural de transportar vectores paralelamente de un espacio tangente a otro, sino que también cada conexión introduce el concepto de paralelismo. En general, en una variedad diferenciable la conexión y la métrica son objetos independientes. Sin embargo, de acuerdo al teorema de Levi-Civita, la conexión puede ser determinada de manera única por la métrica si la primera es simétrica y compatible con la métrica. Esto será detallado en las siguientes secciones.

## 1.2. Geometría Riemanniana

Uno de los aspectos que caracterizan a una geometría es la manera en la que se realiza el transporte paralelo de un vector a lo largo de una curva sobre la variedad. En el caso de una geometría Riemanniana, matemáticamente esto se escribe como

$$\frac{D}{d\lambda}g(\bar{V}, \bar{U}) = 0. \quad (1.2.1)$$

donde  $\gamma = \gamma(\lambda)$  es una curva suave,  $\bar{U}$  y  $\bar{V}$  campos vectoriales definidos a lo largo de  $\gamma$  y  $\frac{D}{d\lambda}$  denota la derivada covariante de  $g$  respecto al campo de vectores tangente  $\frac{d}{d\lambda}$ . Esta ecuación diferencial es conocida como condición de metricidad y su solución

$$g(\bar{V}(\lambda), \bar{U}(\lambda)) = g(\bar{V}(\lambda_0), \bar{U}(\lambda_0)) \quad (1.2.2)$$

nos lleva necesariamente a la conservación del producto escalar. Particularmente y como consecuencia de esto la longitud de un vector al ser transportado paralelamente es constante, como se muestra a continuación

$$L^2 = g(\bar{U}, \bar{U}) \quad (1.2.3)$$

$$2L \frac{dL}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}g(\bar{U}, \bar{U}) = 2g\left(\frac{D\bar{U}}{d\lambda}, \bar{U}\right) = 2g(\bar{0}, \bar{U}) = 0. \quad (1.2.4)$$

Al transportar un campo vectorial  $\bar{U}$  en la dirección de un campo vectorial  $\bar{V}$  el ángulo entre un vector transportado  $\bar{y} \in \bar{U}$  y el vector que define la curva en ese punto  $\bar{x} \in \bar{V}$  se

calcula como

$$\cos \theta = \frac{g(\bar{U}, \bar{V})}{g(\bar{U}, \bar{U})^{\frac{1}{2}} g(\bar{V}, \bar{V})^{\frac{1}{2}}} \quad (1.2.5)$$

En especial, si el transporte paralelo se realiza sobre una curva geodésica, esto es  $\nabla_{\bar{U}} \bar{U} = 0$ , tenemos

$$\cos \theta = \frac{g(\bar{U}, \bar{U})}{g(\bar{U}, \bar{U})^{\frac{1}{2}} g(\bar{U}, \bar{U})^{\frac{1}{2}}} = 1 \quad (1.2.6)$$

es decir, al transportar un campo vectorial sobre el mismo no habrá diferencia alguna ni de longitud ni de ángulo entre un vector transportado y el que ya está definido en ese punto.

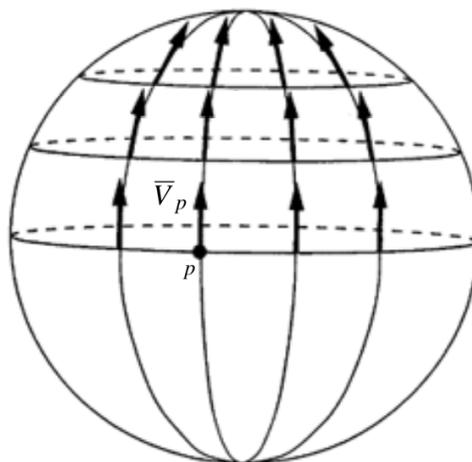


Figura 1.3: Transporte paralelo de un vector por trayectorias distintas.

Sin embargo, como se puede observar en la figura 1.3, si transportamos un vector por un camino u otro y los hacemos coincidir en algún punto, estos no necesariamente coinciden, el conmutador de dos derivadas covariantes mide esta diferencia

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] V^{\rho} = R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} V^{\sigma} - T^{\lambda}_{\mu\nu} \nabla_{\lambda} V^{\rho}, \quad (1.2.7)$$

donde  $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$  es llamado tensor de Riemann y se define de la siguiente manera

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu} \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}. \quad (1.2.8)$$

---

quedando completamente determinado por la conexión, sea o no compatible con la métrica o simétrica. El tensor  $T_{\mu\nu}^{\lambda}$  que aparece en (1.2.7) se llama tensor de torsión y es definido mediante la expresión

$$T_{\mu\nu}^{\lambda} = 2\Gamma_{[\mu\nu]}^{\lambda}. \quad (1.2.9)$$

Como mencionamos anteriormente, cuando la conexión afín satisface ciertos requisitos de compatibilidad con la métrica  $g$ , la primera puede determinarse de manera única por la segunda. Este teorema se conoce como de Levi-Civita y lo enunciaremos a continuación por simplicidad en una carta coordenada. La importancia de este teorema radica en que permite caracterizar una geometría Riemanniana.

**Teorema 1.2.1** (Levi-Civita). *En un variedad diferenciable, existe una única conexión afín de componentes  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}$  que satisface*

i.  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}$  es simétrica.

ii.  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}$  es compatible con la métrica.

*Demostración.* Sea  $\Gamma_{\mu\nu}$  compatible con  $g_{\alpha\beta}$  entonces

$$g_{\beta\gamma;\alpha} = 0 \quad (1.2.10)$$

La derivada covariante del tensor métrico se determina como

$$g_{\beta\gamma;\alpha} \equiv g_{\beta\gamma,\alpha} - g_{\sigma\gamma}\Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma} - g_{\beta\sigma}\Gamma_{\gamma\alpha}^{\sigma} = 0 \quad (1.2.11)$$

permutando  $\alpha\beta\gamma \rightarrow \beta\gamma\alpha$

$$g_{\gamma\alpha;\beta} \equiv g_{\gamma\alpha,\beta} - g_{\sigma\alpha}\Gamma_{\gamma\beta}^{\sigma} - g_{\gamma\sigma}\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} = 0 \quad (1.2.12)$$

permutando nuevamente  $\alpha\beta\gamma \rightarrow \gamma\alpha\beta$

$$g_{\alpha\beta;\gamma} \equiv g_{\alpha\beta,\gamma} - g_{\sigma\beta}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma} - g_{\alpha\sigma}\Gamma_{\beta\gamma}^{\sigma} = 0 \quad (1.2.13)$$

Sumando las ecuaciones en (1.2.11), (1.2.12) y (1.2.13) tenemos

$$g_{\beta\gamma,\alpha} + g_{\gamma\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\gamma} = 2g_{\sigma\gamma}\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \quad (1.2.14)$$

---

y por tanto

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}(g_{\beta\gamma,\alpha} + g_{\gamma\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\gamma}). \quad (1.2.15)$$

□

Esta expresión es conocida como símbolos de Christoffel de 2<sup>da</sup> especie, y nos muestra que dada una métrica la conexión afín con las condiciones del teorema, ésta queda determinada de manera única.

En esta sección hemos mostrado como la geometría Riemanniana es caracterizada por la conservación del producto escalar bajo transporte paralelo. Sin embargo, esta propiedad a Hermann Weyl no le parecía muy natural dado que si en un espacio curvo los vectores cambian su ángulo respecto a sus respectivas tangentes bajo transporte paralelo, entonces sus longitudes ó normas debían también ser variables. Esto último no se logra con la condición de metricidad. En 1918, con la idea de unificar gravitación con electromagnetismo Weyl propuso una nueva geometría que hoy lleva su nombre y que abordaremos en la siguiente sección.

### 1.3. Geometría de Weyl

Permitir que únicamente la dirección de un vector dependa de la trayectoria de desplazamiento como ocurre en la geometría de Riemann parece restrictivo ¿qué ocurre si permitimos también el reescalamientos de la longitud de dichos vectores? Recordemos que la idea de introducir reescalamientos en una unidad de medida surge en 1918 con Hermann Weyl en un intento de unificar gravedad y electromagnetismo, de ahí que esta geometría lleve su nombre.

La condición de compatibilidad que caracteriza a la geometría de Weyl se escribe matemáticamente como

$$\frac{D}{d\lambda}g(\bar{V}, \bar{U}) = \tilde{\sigma}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)g(\bar{V}, \bar{U}) \quad (1.3.1)$$

donde  $\gamma = \gamma(\lambda)$  es una curva diferenciable,  $\bar{U}, \bar{V} \in T_{\gamma(\lambda)}(\mathcal{M})$ ,  $\frac{D}{d\lambda}$  denota la derivada covariante de  $g$  respecto al campo de vectores tangente  $\frac{d}{d\lambda}$ . y  $\tilde{\sigma}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)$  indica la aplicación

---

de la 1-forma  $\tilde{\sigma}$  sobre  $\frac{d}{d\lambda}$ . Esta ecuación diferencial es conocida como condición de no metricidad y su solución dada por

$$g(\bar{V}(\lambda), \bar{U}(\lambda)) = g(\bar{V}(\lambda_0), \bar{U}(\lambda_0)) e^{\int_c \tilde{\sigma} \left( \frac{d}{d\lambda} \right) d\lambda} \quad (1.3.2)$$

determina los reescalamientos del producto escalar entre dos campos vectoriales causados por el campo de 1-formas  $\tilde{\sigma}$ .

De la misma manera en que el teorema de Levi-Civita en una geometría Riemanniana garantiza la existencia de una única conexión afín, simétrica y compatible con la métrica definida en (1.2.1), para una geometría de Weyl contamos con la extensión del mismo para una conexión afín simétrica, compatible con el tensor métrico (1.3.1) y un campo  $\tilde{\sigma}$  dado. Cuando la derivada covariante de la métrica es nula, se dice que tenemos metricidad. Sin embargo, cuando esto no ocurre se habla de una no-metricidad. En general se escribe  $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta\mu}$ , donde  $N_{\alpha\beta\mu}$  se conoce como tensor de no-metricidad.

**Teorema 1.3.1** (Generalización del teorema de Levi-Civita). *En un espacio-tiempo caracterizado por la condición de no metricidad*

$$\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = \tilde{\sigma}_\alpha g_{\beta\gamma} \quad (1.3.3)$$

existe una única conexión afín  $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma$  para un campo de 1-forma  $\tilde{\sigma}_\alpha$  dado que satisface

i.  $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma$  es simétrica.

ii.  $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma$  es compatible con la métrica.

*Demostración.* La derivada covariante de la métrica se determina como

$$\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = g_{\beta\gamma,\alpha} - g_{\sigma\gamma} \Gamma_{\beta\alpha}^\sigma - g_{\beta\sigma} \Gamma_{\gamma\alpha}^\sigma = \tilde{\sigma}_\alpha g_{\beta\gamma} \quad (1.3.4)$$

permutando  $\alpha\beta\gamma \rightarrow \beta\gamma\alpha$

$$\nabla_\beta g_{\gamma\alpha} = g_{\gamma\alpha,\beta} - g_{\sigma\alpha} \Gamma_{\gamma\beta}^\sigma - g_{\gamma\sigma} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma = \tilde{\sigma}_\beta g_{\gamma\alpha} \quad (1.3.5)$$

---

permutando nuevamente  $\alpha\beta\gamma \rightarrow \gamma\alpha\beta$

$$\nabla_{\gamma} g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta,\gamma} - g_{\sigma\beta}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma} - g_{\alpha\sigma}\Gamma_{\beta\gamma}^{\sigma} = \tilde{\sigma}_{\gamma}g_{\alpha\beta} \quad (1.3.6)$$

sumando las ecuaciones (1.3.4), (1.3.5) y restando (1.3.6)

$$g_{\beta\gamma,\alpha} + g_{\gamma\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\gamma} = 2g_{\theta\gamma}\Gamma_{\alpha\beta}^{\theta} + \tilde{\sigma}_{\alpha}g_{\beta\gamma} + \tilde{\sigma}_{\beta}g_{\gamma\alpha} - \tilde{\sigma}_{\gamma}g_{\alpha\beta} \quad (1.3.7)$$

resulta finalmente

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\gamma\theta}(g_{\beta\gamma,\alpha} + g_{\gamma\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\gamma}) - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_{\alpha}\delta_{\beta}^{\theta} + \tilde{\sigma}_{\beta}\delta_{\alpha}^{\theta} - \tilde{\sigma}_{\gamma}g^{\gamma\theta}g_{\alpha\beta}). \quad (1.3.8)$$

□

Estas son las componentes de conexión propias de la geometría de Weyl-Integrable. La primera parte son los símbolos de Christoffel, ya conocidos de la geometría de Riemann, mientras que el segundo término tiene dependencia del campo de 1-formas  $\tilde{\sigma}$ .

La propuesta de Weyl para llevar a cabo la unificación de gravedad y electromagnetismo puede resumirse como sigue [2]

- a. El espacio-tiempo se representa por una variedad  $\mathcal{M}$  dotada de una estructura conforme; es decir, una clase de métricas  $\{\mathbf{g}\}$  lorentzianas equivalentes en sentido conforme (conservan los ángulos pero no las distancias). Este requerimiento expresa la condición de que sólo sea posible comparar longitudes en un mismo punto de  $\mathcal{M}$ .
- b. Se supone, al igual que en la geometría de Riemann, la existencia de una conexión afín (lineal y sin torsión) que define una derivada covariante,  $\nabla$ , y representa la estructura conforme. En lenguaje diferencial esto significa que para cualquier métrica  $g \in \{\mathbf{g}\}$ , la derivada covariante de  $g$  ha de ser proporcional a la propia  $g$ .

Si la geometría de Weyl describe correctamente el espacio-tiempo, ello implica que las leyes naturales deben obedecer una doble invariancia; en primer lugar deben ser invariantes bajo el grupo de difeomorfismos, y además deben ser también invariantes bajo transformaciones de norma. De hecho Weyl postuló que, de todas las conexiones afines de

---

la clase de equivalencia conforme, sólo una guarda relación con la física del mundo real. Concretamente se trata de aquella que cumple  $\tilde{\sigma}_\mu = \left(\frac{e}{\varepsilon}\right) A_\mu$ , en la que  $e$  es la carga del electrón y  $\varepsilon$  una constante indeterminada.

Weyl construye una funcional de acción covariante general y covariante de norma, que también permita deducir las ecuaciones del tensor métrico  $g$  y el potencial vectorial electromagnético  $A$ . Ya en sus primeros trabajos de 1918, escribe lo que hoy denominamos funcional de acción de Yang-Mills

$$S(g, A) = -\frac{1}{4} \int \text{Tr} (\Omega \wedge^* \Omega) \quad (1.3.9)$$

donde  $\Omega$  denota la curvatura,  $^*\Omega$  es su dual de Hodge y la cuña denota el producto cuña (wedge). Sin embargo, hay una observación hecha por Einstein hacia esta geometría conocida en la literatura como problema del segundo reloj, que dio pie a la aparición de una nueva Geometría, la Geometría de Weyl-Integrable, que discutiremos en la siguiente sección.

## 1.4. Geometría de Weyl-Integrable

Como Einstein hizo saber a Weyl, si la idea de su geometría fuese correcta, si tomamos dos relojes atómicos idénticos en el mismo punto del espacio-tiempo y los trasladamos por caminos distintos hasta hacerlos coincidir de nuevo en otro lugar, sus frecuencias serían diferentes. Esta conclusión se halla en contradicción con la evidencia empírica que nos confirma la existencia de espectros atómicos estables, es decir, los mismos átomos emiten las mismas frecuencias electromagnéticas estén donde estén y sea cual sea su historia previa [2]. Diez años le tomó a Weyl resolver este problema y lo hizo utilizando el teorema de Stokes enunciado a continuación

**Teorema 1.4.1.** *Si  $\tilde{\sigma} = Pdx + Qdy + Rdz$  es una 1-forma sobre un abierto que contiene a una región  $S \subset \mathbb{R}^3$  con frontera  $\partial S$  recorrida en sentido positivo, entonces*

$$\int_{\partial S} \tilde{\sigma} = \iiint_S d\tilde{\sigma} \quad (1.4.1)$$

donde

$$d(Pdx + Qdy + Rdz) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz dx \quad (1.4.2)$$

De la ecuación (1.3.2) encontramos que

$$g(\bar{V}(\lambda), \bar{U}(\lambda)) = g(\bar{V}(\lambda_0), \bar{U}(\lambda_0)) \quad (1.4.3)$$

si y sólo si

$$\oint_{c'} \tilde{\sigma} \left(\frac{d}{d\lambda}\right) d\lambda = 0 \quad (1.4.4)$$

es decir requerimos que el campo de 1-formas sea igual al gradiente de un campo escalar,  $\tilde{\sigma} = \phi_{,\alpha}$ , dicho de otra manera, pedimos que  $\tilde{\sigma}$  sea integrable, de aquí el nombre de esta nueva geometría. Sin embargo, si consideramos que el campo  $\tilde{\sigma}$  es el potencial electromagnético  $\tilde{\sigma} = \frac{e}{c}A = P_A dx + Q_A dy + R_A dz$  tendríamos

$$dA = \left(\frac{\partial Q_A}{\partial x} - \frac{\partial P_A}{\partial y}\right) dx dy + \left(\frac{\partial R_A}{\partial y} - \frac{\partial Q_A}{\partial z}\right) dy dz + \left(\frac{\partial P_A}{\partial z} - \frac{\partial R_A}{\partial x}\right) dz dx = 0 \quad (1.4.5)$$

lo que por supuesto se cumple si

$$\left(\frac{\partial Q_A}{\partial x} - \frac{\partial P_A}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial R_A}{\partial y} - \frac{\partial Q_A}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial P_A}{\partial z} - \frac{\partial R_A}{\partial x}\right) = 0. \quad (1.4.6)$$

Esto significa que el tensor electromagnético es nulo  $F = dA = 0$  y por lo tanto la unificación que Weyl buscaba al postular esta geometría se había perdido. Es así como surge lo que hoy en día conocemos como geometría de Weyl-Integrable, la condición en (1.3.3) se ve modificada como

$$\frac{D}{d\lambda} g(\bar{V}, \bar{U}) = \frac{d\phi}{d\lambda} g(\bar{V}, \bar{U}) \quad (1.4.7)$$

y por consiguiente las componentes coordenadas de la conexión afín tienen la forma

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{1}{2} g^{\gamma\lambda} [g_{\lambda\alpha,\beta} + g_{\lambda\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\lambda}] + \frac{1}{2} g^{\gamma\lambda} [g_{\lambda\alpha}\phi_{,\beta} + g_{\lambda\beta}\phi_{,\alpha} - g_{\alpha\beta}\phi_{,\lambda}]. \quad (1.4.8)$$

Un hecho importante a resaltar es que la ecuación en (1.4.7) queda invariante al realizar de manera simultánea las transformaciones de Weyl conformadas por el grupo de transformaciones conformes, y el grupo de traslaciones

$$\bar{g} = e^f g \quad (1.4.9)$$

$$\bar{\phi} = \phi + f. \quad (1.4.10)$$

---

bajo la composición de transformaciones, siendo  $f$  una función escalar. Para analizar la interpretación que se le da a esta invariancia consideremos lo siguiente. La estructura de un espacio-tiempo cuya geometría asociada es de Weyl-Integrable está determinada por una variedad  $\mathcal{M}$ , un producto escalar  $g$  y el campo escalar  $\phi$ , que denotaremos como  $(\mathcal{M}, g, \phi)$  y al cual nos referiremos como frame. Lo que estas transformaciones nos dicen es que es posible pasar de un frame  $(M, g, \phi)$  a otro  $(M, \bar{g}, \bar{\phi})$  dentro de una misma clase de equivalencia, la cual se caracteriza por preservar la geometría de Weyl. Esta interpretación resulta especialmente importante debido a que al trabajar en una teoría física, ésta no será única, sino que tendremos un conjunto de teorías físicas matemáticamente equivalentes en cada uno de estos frames. Uno de los resultados de recientes investigaciones en el tema muestran que en esa clase de equivalencia existe un miembro cuya geometría puede ser descrita de manera efectiva como la Riemanniana. Para ver esto se introduce la métrica efectiva

$$h \equiv e^{-\phi} g, \quad (1.4.11)$$

con la cual se cumple la condición

$$\nabla_{\alpha} h_{\mu\nu} = 0 \quad (1.4.12)$$

con lo que obtenemos una condición de metricidad efectiva que caracteriza a una geometría de Riemann efectiva. De esta manera el resultado reciente e interesante es que es posible obtener una geometría de Riemann efectiva a partir de una geometría de Weyl-integrable bajo una elección de norma  $f = -\phi$ , lo que nos lleva a una elección particular de frame.

Como consecuencia de esta elección de frame  $(M, h = e^{-\phi} g, \bar{\phi} = 0)$  es que en éste ya no requeriremos de pedir invariancia a la teoría física bajo las transformaciones de Weyl, sino que bastará al igual de lo que ocurre en la geometría de Riemann con exigir invariancia bajo el grupo de difeomorfismos.

Recientemente se ha propuesto que la geometría de Weyl-Integrable pudiera ser la más apropiada para ciertas teorías gravitacionales como es el caso de la teoría escalar tensorial de Brans-Dicke. Si se impone una geometría no apropiada surgen inconsistencias

---

como la aparición de una quinta fuerza. Para entender de manera más clara el impacto en una teoría de gravitación al cambiar la geometría de fondo, en el siguiente capítulo estudiaremos las teorías de gravitación más comunes en la literatura, y sobre las que se fundamenta nuestro trabajo de investigación.

# Capítulo 2

## Gravitación

Como hemos visto en el capítulo anterior, existen geometrías que pueden verse como generalizaciones a la geometría Riemanniana. Cada teoría de gravitación que podemos encontrar en la literatura se formula en una geometría de fondo determinada. La gran mayoría de este tipo de teorías es formulada en una geometría Riemanniana. Sin embargo, es de nuestro interés determinar el impacto tanto físico como matemático del cambio de geometría de fondo en las diferentes teorías de gravitación. Con el objetivo de esclarecer este punto y de abordar los fundamentos físicos de las diferentes teorías de gravitación, este capítulo lo dedicaremos al estudio de los principios básicos de las teorías de gravitación más comunes, de las cuales se requiere cierto grado de entendimiento para el desarrollo de la presente tesis.

### 2.1. Transformaciones de Lorentz

En 1687 Isaac Newton postuló que la fuerza de atracción gravitatoria entre dos cuerpos es proporcional al producto de sus masas dividido por la distancia entre ellos al cuadrado, matemáticamente se escribe

$$F = G \frac{Mm}{d^2}, \quad (2.1.1)$$

a esta expresión se le conoce como Ley de la gravitación Universal, donde  $G$  es una constante de proporcionalidad que no sólo hace dimensionalmente correcta la expresión

---

$[G] = \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2\text{kg}}$  sino que también determina el acoplamiento gravitacional entre las masas. Con esta Ley, Newton demostró que la física terrestre y la física celeste son una misma cosa. El concepto de gravitación logró revelar el significado físico de las tres leyes de Kepler sobre el movimiento planetario, resolver el problema del origen de las mareas y dar cuenta de la inexplicable observación de Galileo Galilei de que el movimiento de un objeto en caída libre es independiente de su peso. Los resultados de los experimentos y observaciones astronómicas que se han hecho desde que Newton propusiera su teoría coinciden con los cálculos a excepción del perihelio de mercurio, cuando los astrónomos usaron la ley de la gravitación de Newton para calcular la órbita de Mercurio alrededor del Sol y su posición aparente en el cielo, visto desde la Tierra y compararon esos cálculos con las observaciones, encontraron que eran casi iguales, pero había una pequeña diferencia en la posición real de Mercurio, cada año parecía cambiar su posición un ángulo de 0.43 segundos de arco. La teoría de Newton parecía funcionar con todos los demás planetas pero con Mercurio no era el caso.

Recordemos que la mecánica de Newton es válida en cualquier sistema de referencia inercial, matemáticamente esto se expresa diciendo que las leyes de la mecánica son invariantes bajo las transformaciones de Galileo  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dadas por

$$G(t, x) = (t, x + vt), \quad (2.1.2)$$

donde por simplicidad hemos considerado solo un espacio de  $1 + 1$ -dimensiones, una tipo tiempo y otra tipo espacio.

Sin embargo, la teoría electromagnética de Maxwell no lo es. La principal predicción de las ecuaciones de Maxwell es la ecuación de onda electromagnética, así que sí esta ecuación no es invariante bajo transformaciones de Galileo, entonces puede afirmarse que el electromagnetismo no lo es. Si la función  $u(t, x) = f(x - ct)$  es una solución de la ecuación de onda electromagnética

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.1.3)$$

en el sistema de referencia inercial  $R$ , en otro sistema de referencia inercial  $S$  la función

se escribe como  $w(t, x) = u \circ G(t, x) = f(x + (v - c)t)$ , y derivando se tiene

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f'' \cdot (v - c)^2, \quad (2.1.4)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f'', \quad (2.1.5)$$

de modo que

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f'' \cdot \left( -\frac{(v - c)^2}{c^2} + 1 \right), \quad (2.1.6)$$

y por tanto no satisface la ecuación (2.1.3).

Lorentz estaba interesado en encontrar unas transformaciones lineales que dejaran invariante a la ecuación de onda. Se define la transformación  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mediante

$$L(t, x) = \left( \gamma \left( t + \frac{v}{c^2} x \right), \gamma (vt + x) \right), \quad (2.1.7)$$

siendo  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ . Las ecuaciones en (2.1.7) se llaman transformaciones de Lorentz y forman un grupo bajo la composición de transformaciones llamado Grupo de Lorentz.

Entonces  $w(t, x) = u \circ L(t, x) = f(\gamma(v - c)t + \gamma(1 - \frac{v}{c})x)$ , y derivando

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f'' \cdot \gamma^2 (v - c)^2, \quad (2.1.8)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f'' \cdot \gamma^2 \left( 1 - \frac{v}{c} \right)^2, \quad (2.1.9)$$

luego

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{1}{c^2} f'' \cdot \gamma^2 (v - c)^2 + f'' \cdot \gamma^2 \left( \frac{c - v}{c} \right)^2 = 0, \quad (2.1.10)$$

por tanto es de nuevo una solución de la ecuación. Es importante resaltar que la transformación no es de Galileo, en particular  $t' = \gamma \left( t + \frac{v}{c^2} x \right)$  no respeta el tiempo absoluto.

Einstein construye la relatividad especial respetando que las leyes de la física sean las mismas en todos los marcos de referencia inerciales como ocurre en la mecánica de Newton y que la luz sigue una trayectoria recta con velocidad constante y finita  $c$  en cualquier marco de referencia inercial como ocurre en la teoría electromagnética de Maxwell. Con esto se obtiene que la noción de simultaneidad es relativa y que el grupo que relaciona los marcos de referencia inerciales no es el de Galileo sino el de Lorentz, concluyendo ahora que ambas teorías son invariantes bajo el mismo grupo.

---

Las diferencias entre la mecánica de Newton y la teoría de la relatividad especial sólo se manifiestan a velocidades comparables a la de la luz. En cambio, cuando los cuerpos que observamos se mueven con velocidades bajas, como ocurre en la vida cotidiana, se reproduce aproximadamente la mecánica de Newton, lo que explica porqué nuestra intuición es más próxima a las ideas de Newton.

Después de que Einstein desarrollo su teoría de la relatividad especial, su siguiente objetivo fue formular una nueva teoría de Gravitación compatible con su teoría relativista. La Teoría de la Relatividad General es esta extensión de la relatividad especial que si describe gravedad. La idea principal de la relatividad general es que la gravedad se manifiesta no como un campo sino como la curvatura del espacio-tiempo. En la siguiente sección estudiaremos los elementos básicos de la teoría de la relatividad general.

## 2.2. Elementos de relatividad general

Una forma de mantener un cuerpo en una trayectoria circular es con la aplicación de una fuerza central que sea perpendicular a la dirección en la cual se está moviendo un cuerpo como ocurre en la mecánica Newtoniana. Pero otra manera de mantener a un objeto en una trayectoria circular sin necesidad de que exista una fuerza de atracción entre el objeto y el punto central en torno al cual está girando el objeto, es restringiendo al cuerpo en movimiento a moverse sobre una superficie que es la que le dicte al objeto la trayectoria que debe seguir. Dicho de otra manera, la relatividad general se basa en la imposibilidad de distinguir entre un campo gravitacional uniforme y un marco uniformemente acelerado. Este hecho se conoce en la literatura como principio de equivalencia. La idea en esta teoría es que la materia deforma al espacio-tiempo generando curvatura, la cual se toma como manifestación del campo gravitacional. Formalmente definimos un espacio-tiempo de la siguiente manera.

**Definición 2.2.1.** Un espacio-tiempo clásico es una estructura  $(\mathcal{M}, g_{\beta\gamma}, \nabla)$  donde

- i.  $\mathcal{M}$  es una variedad 4-dimensional diferenciable, conectada,

- 
- ii.  $g_{\beta\gamma}$  es un tensor métrico en  $\mathcal{M}$  de signatura Lorentziana,
  - iii.  $\nabla$  es un operador diferencial en  $\mathcal{M}$ , y
  - iv. la condición de compatibilidad se satisface, que en el caso de ser una geometría Riemanniana esta condición resulta ser

$$\nabla_{\alpha}g_{\beta\gamma} = 0. \quad (2.2.1)$$

$\mathcal{M}$  se interpreta como el espacio de eventos y los objetos  $g_{ab}$  y  $\nabla$  en  $\mathcal{M}$  representan la estructura del espacio-tiempo.

De esta manera vemos que el tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$  describe no sólo las propiedades topológicas y métricas de la variedad como se mostró en el capítulo 1, sino que físicamente describe el campo gravitacional. De hecho en muchas ocasiones se le llama potential gravitacional relativista.

Nos preguntamos ahora: ¿qué tipo de trayectoria describe una partícula libre en un espacio-tiempo curvo? El resultado es una geodésica, es decir, una curva de longitud mínima. De esta manera, la ecuación de movimiento de una partícula libre en un campo gravitacional arbitrario y un sistema de coordenadas arbitrario es

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\sigma^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{d\sigma} \frac{dx^{\lambda}}{d\sigma} = 0. \quad (2.2.2)$$

Esta ecuación se conoce como ecuación de geodésicas y es el análogo relativista a la segunda ley de Newton. De hecho esta ecuación puede obtenerse de manera más formal a partir del elemento diferencial de línea mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Por otro lado, se sabe que los valores del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  y la conexión afín  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  en un punto  $p$  en un sistema de coordenadas arbitrario  $x^{\mu}$  proveen de información suficiente para determinar las coordenadas locales inerciales de la curva  $\sigma^{\alpha}(x)$  en una vecindad de  $p$ . Es importante hacer notar que en cada punto del espacio-tiempo en un campo gravitacional arbitrario es posible elegir un sistema local de coordenadas, llamadas coordenadas

geodésicas, tal que dentro de una región lo suficientemente pequeña del punto en cuestión, las leyes de la naturaleza toman la misma forma que en un sistema cartesiano no acelerado en ausencia de gravedad, esto se le conoce como principio de equivalencia y matemáticamente puede justificarse mediante el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.1.** *Dada una variedad diferenciable  $M$  con conexión afín  $\nabla$  simétrica con componentes  $\nabla_{\partial_\alpha} \partial_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \partial_\lambda$ , existe siempre un difeomorfismo  $x^\mu \rightarrow y^\mu$  tal que  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(p) = 0, \forall p \in \Omega \subset M$ .*

*Demostración.* Consideremos el difeomorfismo

$$x^\mu - x_p^\mu = y^\mu + \frac{1}{2} C_{\alpha\beta}^\mu y^\alpha y^\beta \quad (2.2.3)$$

donde  $C_{\alpha\beta}^\mu = C_{\beta\alpha}^\mu = cte$ , evaluando en el punto  $p$  tenemos

$$0 = y_p^\mu + \frac{1}{2} C_{\alpha\beta}^\mu y_p^\alpha y_p^\beta \quad (2.2.4)$$

que tiene la solución trivial  $y_p^\mu = 0$ .

Encontramos que las componentes de conexión en el punto  $p$  resultan ser

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu(y) \Big|_p = \frac{\partial x^\gamma}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\theta}{\partial y^\beta} \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\gamma\theta}^\lambda(x) \Big|_p + \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \Big|_p \quad (2.2.5)$$

$$= \delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\theta \delta_\lambda^\mu \Gamma_{\gamma\theta}^\lambda(p) + \delta_\lambda^\mu C_{\alpha\beta}^\lambda \quad (2.2.6)$$

ya que

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^\alpha \partial y^\lambda} \Big|_p = \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\lambda} \right) \Big|_p = \frac{\partial}{\partial y^\alpha} (\delta_\lambda^\mu + C_{\lambda\beta}^\mu y^\beta) \Big|_p = C_{\lambda\beta}^\mu \delta_\alpha^\beta \Big|_p = C_{\lambda\alpha}^\mu. \quad (2.2.7)$$

Así puede verse fácilmente que si requerimos  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu(p) = 0$ , necesariamente

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(p) = -C_{\alpha\beta}^\mu \quad (2.2.8)$$

lo que completa la demostración.  $\square$

Como consecuencias de este teorema tenemos que las leyes de la física se comportan localmente como si no existiera curvatura alguna. De ahí que el principio de equivalencia

---

reciba también el nombre de invariancia local de Lorentz. Así mismo, se desprende de este principio la igualdad de la masa inercial y la masa gravitatoria, es decir, el hecho de que todos los cuerpos caen con la misma aceleración en un campo gravitatorio.

En 1915 Einstein presenta a la Academia Prusiana de las Ciencias su Teoría de la Relatividad General cuyas ecuaciones de campo son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (2.2.9)$$

donde  $g_{\mu\nu}$  es el tensor métrico,  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci,  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$  es el escalar de curvatura,  $T_{\mu\nu}$  es el tensor energía momento y  $\kappa$  hace dimensionalmente correcta la expresión y cuyo valor  $\kappa = 8\pi G$  se determina mediante el límite Newtoniano que describiremos más adelante. El lado izquierdo de la ecuación (2.2.9) se suele identificar como  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$  y es conocido como tensor de Einstein.

Una manera alternativa de obtener las ecuaciones de campo de Einstein presentadas en (2.2.9) es mediante el uso de un principio variacional llamado principio de mínima acción. Considerando un tensor métrico con signatura  $(+, -, -, -)$ , la correspondiente funcional de acción es determinada por

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda + \mathcal{L}_{mat}). \quad (2.2.10)$$

conocida como funcional de acción de Einstein-Hilbert.

En 1917 Einstein aplicó la RG a la Cosmología y obtuvo una solución que representaba un universo homogéneo, isotrópico y estático, pero inestable. A fin de obtener un modelo de universo estático, Einstein modificó la ecuación (2.2.9), mediante la introducción de un nuevo término, en la forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (2.2.11)$$

donde  $\Lambda$  se conoce como constante cosmológica y donde el término  $\Lambda g_{\mu\nu}$  fue el que Einstein introdujo para generar una fuerza repulsiva que garantizara soluciones cosmológicas estáticas. Esta introducción es posible ya que  $\nabla_\alpha (\Lambda g_{\mu\nu}) = 0$  debido a que la teoría está formulada en una geometría Riemanniana.

---

Otra de las características de la relatividad general es que es posible recuperar la gravitación de Newton a partir de la relatividad general mediante la llamada aproximación de campo débil, también conocido como límite Newtoniano. Para esto se considera lo siguiente

- a. Que las partículas se muevan lentamente respecto a la velocidad de la luz  $v \ll c$ .
- b. Que el campo gravitacional sea débil, esto es

$$g_{\alpha\beta} \approx \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad (2.2.12)$$

donde  $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$ .

- c. Que el campo gravitacional sea estático

$$h_{\mu\nu} \neq h_{\mu\nu}(t). \quad (2.2.13)$$

De la ecuación de geodésicas (1.1.24) se sigue que

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 + \Gamma_{ij}^\mu \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} = 0, \quad (2.2.14)$$

donde se ha separado la parte temporal de la espacial. Suponiendo que  $\Gamma_{00}^\mu \geq \Gamma_{ij}^\mu$  encontramos

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\sigma} h_{00,\sigma} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (2.2.15)$$

donde  $\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\sigma} h_{00,\sigma}$ . Para la parte temporal  $\mu = 0$  se obtiene que la curva geodésica de una partícula libre satisface

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = 0, \quad (2.2.16)$$

y para la parte espacial se llega a

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \eta^{ij} h_{00,j}. \quad (2.2.17)$$

De la mecánica Newtoniana se sigue que para  $m = \text{cte}$  la aceleración causada por la fuerza gravitacional es igual a menos el gradiente del potencial gravitacional  $\bar{a} = -\nabla\Phi$  ya que

$$\bar{F} = m\bar{a} = -m\nabla\Phi \quad (2.2.18)$$

---

comparando con (2.2.17) vemos que  $h_{00} = -2\Phi$  por tanto la componente  $g_{00}$  del elemento diferencial de línea para el campo gravitacional débil resulta ser

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = 1 - 2\Phi. \quad (2.2.19)$$

Además, mediante la comparación con la ley de la gravitación universal

$$F = -\frac{GmM}{r^2} \quad (2.2.20)$$

encontramos que el campo escalar debe ser dado por  $\Phi = \frac{GM}{r}$ .

De igual manera, para determinar el valor de  $\kappa$  en la ecuaciones (2.2.9), se toma el límite Newtoniano y se encuentra que su valor debe ser

$$\kappa = 8\pi G \quad (2.2.21)$$

siendo  $G$  la constante de acoplamiento gravitacional. De esta manera conocemos la forma completa de las ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (2.2.22)$$

Sin embargo, para reemplazar a una teoría dominante, la nueva debe poder hacer una predicción que muestre la diferencia entre la idea anterior y la que está siendo propuesta, la teoría de Einstein incluye una predicción teórica. A diferencia de la mecánica newtoniana, su hipótesis es que los rayos luminosos que pasan cerca del Sol se desvían ligeramente debido al campo gravitatorio del cuerpo celeste, a esto se le conoce como deflexión de la luz. Si Einstein estaba en lo cierto, cuando un observador en la Tierra viera las estrellas sus posiciones parecerían ser desplazadas por un trecho progresivamente mayor cuanto más cerca éstas estuvieran del Sol. El 29 de mayo de 1919 la hipótesis fue confirmada por el astrónomo británico llamado Arthur Stanley Eddington al fotografiar la luz de las estrellas durante un eclipse total ya que sólo cuando la Luna pasa delante del Sol y bloquea su luz, el cielo se vuelve tan oscuro como la noche y las estrellas se pueden ver durante el día.

En los años 20 del siglo pasado, el astrónomo norteamericano Edwin Hubble emprendió el proyecto de medir la distancia a las nebulosas espirales, tal como entonces

---

se llamaban, en las que ya había observado Slipher un desplazamiento hacia el rojo, y encontró una relación aproximadamente lineal entre el corrimiento al rojo y la distancia a estrellas variables del tipo cefeidas que poseen las galaxias. Si el corrimiento al rojo cosmológico de los fotones, lo hubiéramos atribuido al efecto Doppler diríamos que los fotones que emite el objeto son desplazados hacia el rojo debido a la velocidad de la fuente. Pero la manera de ver el mismo efecto mediante la expansión del espacio es que debido a ella la longitud de onda de un fotón aumenta con un factor de escala  $a(t)$ . De esta manera cuando el universo se expande, un fotón propagándose por el espacio se desplaza a longitudes de onda cada vez mayores.

La expansión del universo fue detectada y observada solo unos pocos años después de la Relatividad General. Einstein hasta entonces había creído en un universo estático y para rechazar la idea de un universo en expansión había tenido que introducir en sus ecuaciones la llamada constante cosmológica como ya se mencionó anteriormente. Cuando en 1929 conoció las observaciones de Hubble, Einstein quedó consternado. Posteriormente se refirió a esta introducción como el mayor error de su vida. Cabe mencionar que debido a observaciones realizadas por Perlmutter y Schmidt de supernovas tipo Ia, el universo se encuentra no sólo en expansión, sino que además actualmente es acelerada.

La teoría de gravitación con mayor aceptación hasta la fecha es la relatividad general de Einstein, pero debido a razones como la presente expansión acelerada del universo o la falta de una teoría cuántica de la gravedad, varias teorías de gravitación alternativas han sido propuestas. Algunas de las más fructíferas han sido las Teorías Extendidas de la Gravedad (ETGs), las cuales han sido de interés en cosmología debido a que, entre otras cosas, contienen soluciones que predicen tanto la expansión inflacionaria del Universo temprano, como la presente expansión acelerada del mismo. Sin embargo, algunas de estas teorías no están libres de problemas, como por ejemplo predicen la existencia de partículas exóticas cuya existencia no ha sido corroborada. Por este y otros motivos, ha surgido la necesidad de seguir buscando modelos que encajen con las observaciones, pero sin que esto conlleve a problemas más graves o insolubles.

En ETGs, las ecuaciones de campo se modifican de dos maneras: la primera incluyendo

---

términos geométricos extras a la acción de Einstein-Hilbert contruidos enteramente con el tensor de curvatura tales como:  $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ ,  $R^{\mu\nu\alpha\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}$ ,  $R\Box R$ , y la segunda dando lo que llamamos teorías escalares tensoriales, es decir, teorías cuya característica es que poseen un término de acoplamiento no mínimo, como por ejemplo  $\phi R$ , siendo el caso más simple de estas teorías la de Jordan-Brans-Dicke la cual incorpora el principio de Mach, que en términos simples establece que la inercia de los objetos es generada por los objetos circundantes.

Las teorías escalares-tensoriales tienen su origen en los años 50. Pascual Jordan estaba intrigado por la aparición de un nuevo campo escalar en las teorías de tipo Kaluza-Klein, y especialmente en su posible papel como una constante gravitacional generalizada. La teoría de la gravitación debe ser una teoría métrica, ya que está es la forma más sencilla de incluir el principio de equivalencia. Sin embargo nada nos impide suponer ingredientes adicionales al tensor métrico. La generalización más sencilla a la relatividad general es la teoría escalar-tensorial de Brans-Dicke que abordaremos en la siguiente sección.

### 2.3. Teoría escalar-tensorial de la gravedad de Brans-Dicke

Carl Brans y Robert H. Dicke plantearon por primera vez en 1961 una teoría de gravitación alternativa a la relatividad general que incluía la existencia de un campo escalar  $\Phi$  adicional al tensor métrico que permite que la constante de acoplamiento gravitacional ya no sea constante, sino que considere la distribución de materia en el universo, dicha característica es conocida en la literatura como Principio de Mach. La funcional de acción resultante es [14]

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{g} \left[ \Phi R - \frac{\omega}{\Phi} g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} - V(\Phi) + \mathcal{L}^{(m)} \right], \quad (2.3.1)$$

donde  $\omega = cte$  es un parámetro libre de la teoría conocido como parámetro de Brans-Dicke,  $R$  es el escalar de curvatura y  $\mathcal{L}^{(m)}$  es la densidad lagrangiana de materia.

Sin embargo, a manera de ilustrar de que manera esta teoría incluye el principio de Mach, consideremos la acción en (2.3.1) para un campo escalar libre, es decir, que no esté sujeto a un potencial determinado  $V = 0$ . Así (2.3.1) se reduce a

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{g} \left( \Phi R - \frac{\omega}{\Phi} g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} + \mathcal{L}^{(m)} \right). \quad (2.3.2)$$

Las ecuaciones de campo de esta teoría análogas a las ecuaciones de campo de Einstein resultan ser

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\Phi} T_{\mu\nu}^{(m)} + \frac{\omega}{\Phi^2} \left( \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square \Phi \right) + \frac{1}{\Phi} (\Phi_{,\nu,\mu} - g_{\mu\nu} \square \Phi). \quad (2.3.3)$$

El lado izquierdo de esta ecuación nos es completamente familiar pues corresponde al tensor de Einstein. En el primer término del lado derecho,  $T_{\mu\nu}^{(m)}$  representa el tensor energía momento de materia usual de la teoría de la relatividad general, pero con el parámetro de acoplamiento  $\Phi^{-1}$ . El segundo término es el tensor energía momento del campo escalar acoplado también con  $\Phi^{-1}$ . Por último, el tercer término es nuevo y proviene de la presencia de segundas derivadas del tensor métrico, que son eliminadas al integrar por partes para dar una divergencia y los términos extras. El lado derecho de la ecuación tiene, por las identidades de Bianchi, divergencia nula. Usando éstas y la identidad [14]

$$(\nabla^\nu \Phi) R_{\mu\nu} = \square (\nabla_\mu \Phi) - \nabla_\mu (\square \Phi), \quad (2.3.4)$$

obtenemos que el tensor energía momento es conservado,  $T_{;\nu}^{\mu\nu(m)} = 0$ . La ecuación para  $\Phi$  derivada de la acción (2.3.2) puede escribirse como

$$\square \Phi = \frac{8\pi}{3 + 2\omega} T^{(m)}. \quad (2.3.5)$$

Puede notarse que el campo escalar depende de la traza del tensor energía-momento asociado a la materia, y por tanto de la distribución espacial de la misma, de acuerdo con el principio de Mach.

Cuando  $T^{(m)} = 0$ , la acción de BD es invariante bajo una clase de transformaciones  $\{\mathcal{F}_\alpha\}$  conformadas por

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = (G\Phi)^{2\alpha} g_{\mu\nu} \quad \alpha \neq \frac{1}{2}, \quad (2.3.6)$$

---

y la redefinición del campo escalar

$$G\Phi \rightarrow G\tilde{\Phi} = (G\Phi)^{1-2\alpha} \quad (2.3.7)$$

Estas transformaciones, dejan invariante la densidad Lagrangiana de BD

$$\sqrt{-g}\mathcal{L} = \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \tilde{\Phi}\tilde{R} - \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\Phi}}\tilde{g}^{cd}\tilde{\nabla}_c\tilde{\Phi}\tilde{\nabla}_d\tilde{\Phi} \right], \quad (2.3.8)$$

donde  $\tilde{g}$  y  $\tilde{R}$  son el determinante de la métrica y el tensor de curvatura de Ricci respectivamente, asociado con el nuevo tensor métrico  $\tilde{g}_{ab}$ , y

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega - 6\alpha(\alpha - 1)}{(1 - 2\alpha)^2}, \quad (2.3.9)$$

es el nuevo parámetro de BD.

Cuando el parámetro  $\alpha$  varía, las transformaciones  $\mathcal{F}_\alpha$

$$(M, g_{\alpha\beta}, \Phi) \xrightarrow{\mathcal{F}_\alpha} (M, \tilde{g}_{\alpha\beta}, \tilde{\Phi}), \quad (2.3.10)$$

definidas por las ecuaciones (2.3.6) y (2.3.7) generan todos los posibles valores del parámetro  $\tilde{\omega}$ . Dos espacio-tiempo de BD se dicen equivalentes, si pueden relacionarse por una transformación  $\mathcal{F}_\alpha$ . Estas transformaciones definen relaciones de equivalencia, y por ende el conjunto de espacio-tiempo de BD  $(M, g_{\alpha\beta}^{(\omega)}, \Phi^{(\omega)})$  es dividido en clases de equivalencias.

El límite cuando  $\omega \rightarrow \infty$  se puede ver como un parámetro que al cambiar mueve la teoría dentro de una misma clase de equivalencia. Por tanto, en este límite no se puede obtener relatividad general, la cual se encuentra fuera de dicha clase. Por otro lado, cuando  $T^{(m)} \neq 0$ , la invariancia conforme se rompe y al cambiar el parámetro  $\omega$  la teoría de BD ya no está restringida a una clase de equivalencia y por tanto se puede obtener relatividad general en este límite.

En la teoría de Brans-Dicke había prevalecido hasta hace un tiempo el debate acerca de la existencia de dos marcos de referencia llamados frames, en los cuales está escrita la teoría: el frame de Jordan y el frame de Einstein. Existen situaciones en las que la versión de la teoría de BD en el frame de Jordan no es viable y el frame de Einstein es aceptable; y también hay situaciones en las cuales el frame de Jordan es físico esto es, la

teoría formulada en ese frame es teóricamente consistente y capaz de hacer predicciones que en principio, pueden ser verificadas experimentalmente [14].

En el primero de ellos, el frame de Jordan, la acción se escribe

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \Phi R - \frac{\omega}{\Phi} g^{\alpha\beta} \Phi_{;\alpha} \Phi_{;\beta} - V(\Phi) + \mathcal{L}^{(m)} \right], \quad (2.3.11)$$

y se caracteriza por la existencia de un acoplamiento no mínimo del campo escalar con la gravedad. En el segundo de ellos, hay un acoplamiento mínimo y es llamado frame de Einstein, en el cual la funcional de acción adquiere la forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{\tilde{R}}{16\pi G} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{\Phi}_{;\alpha} \tilde{\Phi}_{;\beta} - U(\tilde{\Phi}) + \exp\left(-8\sqrt{\frac{\pi G}{2\omega+3}} \tilde{\Phi}\right) \mathcal{L}^{(m)} \right], \quad (2.3.12)$$

donde

$$U(\tilde{\Phi}) = V[\Phi(\tilde{\Phi})] \exp\left(-8\sqrt{\frac{\pi G}{2\omega+3}} \tilde{\Phi}\right), \quad (2.3.13)$$

es un potencial efectivo. La acción (2.3.12) se obtiene realizando en (2.3.11) una transformación conforme de la métrica, dada por

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow \tilde{g}_{\alpha\beta} = \Omega^2 g_{\alpha\beta}, \quad (2.3.14)$$

siendo  $\Omega = \sqrt{G\Phi}$ , y redefiniendo del campo escalar como

$$\tilde{\Phi}(\Phi) = \sqrt{\frac{2\omega+3}{16\pi G}} \ln\left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right). \quad (2.3.15)$$

En el frame de Jordan las unidades de masa, tiempo y longitud varían y este cambio depende de cada punto del espacio-tiempo. En otras palabras, la física debe ser conformalmente invariante y el grupo de simetría de la teoría de gravitación debe agrandarse para incluir no sólo el grupo de difeomorfismos, sino también transformaciones conformes.

En el caso del frame de Einstein las partículas en caída libre en el universo  $(M, g_{\alpha\beta})$  están sujetas a una fuerza proporcional a  $\tilde{\nabla}^\alpha \phi$  en el espacio-tiempo reescalado  $(M, \tilde{g}_{\alpha\beta})$ , un tipo de quinta fuerza. Esto se puede obtener a partir de la ecuación de la conservación de la energía

$$\nabla^\beta T_{\alpha\beta}^{(m)} = 0, \quad (2.3.16)$$

donde

$$T_{\alpha\beta}^{(m)} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}^{(m)})}{\delta g^{\alpha\beta}}, \quad (2.3.17)$$

En este frame la ecuación (2.3.16) transforma como

$$\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{T}_{(m)}^{\alpha\beta} = -\sqrt{\frac{4\pi G}{2\omega+3}} \tilde{T}^{(m)} \tilde{\nabla}^\beta \tilde{\Phi}, \quad (2.3.18)$$

donde los símbolos de Christoffel son ahora

$$\tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}^\rho = \frac{1}{2} \tilde{g}^{\rho\gamma} (\tilde{g}_{\gamma\beta,\alpha} + \tilde{g}_{\gamma\alpha,\beta} - \tilde{g}_{\beta\alpha,\gamma}) = \Gamma_{\beta\alpha}^\rho + \Omega^{-1} (\Omega_{,\alpha} \delta_\beta^\rho + \delta_\alpha^\rho \Omega_{,\beta} - g^{\rho\gamma} g_{\beta\alpha} \Omega_{,\gamma}). \quad (2.3.19)$$

Con fines ilustrativos, si tomamos el tensor energía momento para materia tipo polvo

$\tilde{T}_{\alpha\beta}^{(m)} = \tilde{\rho}^{(m)} \tilde{u}_\alpha \tilde{u}_\beta$  la ecuación (2.3.16) resulta

$$\tilde{u}_\alpha \left( \frac{d\tilde{\rho}^{(m)}}{d\lambda} + \tilde{\rho}^{(m)} \tilde{\nabla}^\gamma \tilde{u}_\gamma \right) + \tilde{\rho}^{(m)} \left( \frac{d\tilde{u}_\alpha}{d\lambda} - \sqrt{\frac{4\pi G}{2\omega+3}} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\Phi} \right) = 0, \quad (2.3.20)$$

debido a que la densidad de materia es no nula  $\tilde{\rho}^{(m)} \neq 0$  y además la materia tipo polvo se está moviendo  $\tilde{u}_\alpha \neq 0$ , se tiene particularmente que

$$\frac{d\tilde{u}_\alpha}{d\lambda} - \sqrt{\frac{4\pi G}{2\omega+3}} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\Phi} = 0, \quad (2.3.21)$$

y por tanto

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \tilde{\Gamma}_{\beta\rho}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = \sqrt{\frac{4\pi G}{2\omega+3}} \tilde{\nabla}^\alpha \tilde{\Phi}, \quad (2.3.22)$$

es decir, la ecuación de geodésicas tipo tiempo en el frame de Einstein recibe una corrección interpretada como el efecto de una quinta fuerza, en otras palabras, las partículas libres ya no se mueven sobre geodésicas, sino que aparece una desviación de la trayectoria a causa del campo escalar.

En trabajos recientes se sugiere, que este resultado es a causa de la imposición de una geometría Riemanniana sobre el espacio-tiempo [17, 20]. Esto se puede observar de la siguiente manera, nótemos que debido a las transformaciones conformes, la condición de metricidad también debe modificarse

$$\nabla_\mu \tilde{g}_{\alpha\beta} = 0, \quad (2.3.23)$$

$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = \phi_{,\mu} g_{\alpha\beta}, \quad (2.3.24)$$

---

donde  $\phi = -\ln \Phi$ . La ecuación (2.3.24) es exactamente la condición de no-metricidad para una geometría tipo Weyl-Integrable, y como puede apreciarse, en esta geometría la derivada covariante del tensor energía-momento es no nula y por tanto en la ecuación de geodésicas no aparecería una quita fuerza.

Como se pudo observar en las transformaciones discutidas en (2.3.10), entre más grande el valor de  $\omega$ , más cerca está la teoría de BD a relatividad general. Experimentos de la dilatación del tiempo del Sistema Solar colocan usualmente una cota de  $\omega \geq 500$  sobre el parámetro. Una cota más reciente la coloca a  $\omega > 3300$  [17].

A pesar de que la teoría es viable en el límite  $\omega$  en la que se reduce a relatividad general, muchos físicos consideran que no es natural imponer valores tan altos en una teoría.

Una de las razones por las cuales esta teoría recobró el interés de la comunidad científica es debido a que la teoría de unificación de Kaluza-Klein se reduce a la teoría de BD en el frame de Jordan después de la compactificación de la dimensión extra como veremos a continuación.

## 2.4. Teoría gravitoelectromagnética de Kaluza Klein

El origen de las teorías escalares tensoriales de la gravedad se debe al esfuerzo de varios científicos por unificar el campo gravitatorio con los demás campos fundamentales. Los principales intentos para lograr esta unificación fueron incorporando a estos otros campos en un marco geométrico adicional que ya tenían, apareciendo múltiples dimensiones del espacio-tiempo. Esta geometría adicional reside en una o más dimensiones extra que están compactadas dentro del espacio de cuatro dimensiones. Los trabajos más conocidos en la literatura son los de Kaluza y Klein y los de Applequist y colaboradores [21].

La teoría de Kaluza-Klein es considerada como el primer intento formal de unificar gravedad y electromagnetismo en una sólo teoría gravitoelectromagnética en un espacio-tiempo (4+1)-dimensional empleando un tensor métrico para la descripción del campo gravitacional. La idea básica de la teoría es postular una dimensión espacial extra com-

pactificada e introducir solamente gravitación en un espacio-tiempo (4+1)-dimensional. Resulta que la gravedad 5-dimensional se manifiesta en nuestro espacio observable (3+1)-dimensional, como gravedad y electromagnetismo dentro de una misma teoría. Esta teoría fue publicada en 1921 por el matemático alemán Theodor Kaluza y extendida en 1926 por Oskar Klein.

La manera más simple de imaginar un espacio con una dimensión extra es imaginar dicha variedad 1-dimensional adicional pegada en cada punto del espacio tiempo. Dado que la dimensión es compacta la dirección  $x^5$  es periódica, esto es

$$x'^5 = x^5 + 2\pi R_0 \tag{2.4.1}$$

vemos que un espacio conveniente resulta ser una circunferencia cuya geometría está caracterizada por  $e^{ix^5}$  y la cual queda invariante al realizar la transformación en (2.4.1) para  $R_0 \in \mathbb{Z}$  y que además es un espacio compacto. De esta manera, nos es posible asociar la dimensión extra como una circunferencia pequeña en cada punto del espacio 3-dimensional, como se muestra en la figura (2.1) donde por simplicidad en lugar de un espacio 3-dimensional se muestra un plano 2-dimensional.

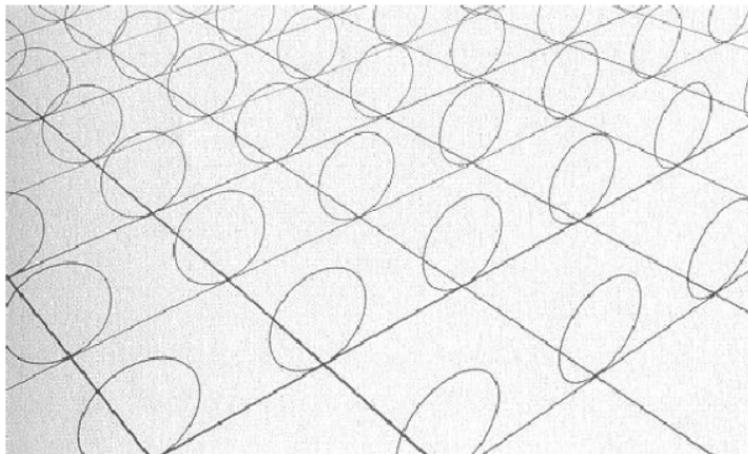


Figura 2.1: Topología del espacio-tiempo

La teoría de Kaluza Klein parte de la funcional de acción de Einstein en vacío 5-

---

dimensional

$$S = \frac{1}{16\pi\hat{G}} \int d^{(4+d)}x \sqrt{-\hat{g}} \hat{R} \quad (2.4.2)$$

siendo  $\hat{g}$  el determinante del tensor métrico 5-dimensional

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \left( \begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} & g_{\mu 5} \\ \hline g_{\nu 5} & g_{55} \end{array} \right), \quad (2.4.3)$$

y  $\hat{R}$  es el escalar de Ricci 5-dimensional definido como

$$\hat{R} = R^{(4)} - \frac{1}{4}\Phi F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{2}{\sqrt{-\Phi}}\partial_\mu\partial^\mu\sqrt{-\Phi}, \quad (2.4.4)$$

siendo  $\Phi = g_{55}$ ,  $R^{(4)}$  es el escalar de Ricci 4-dimensional y

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu B_\mu - \partial_\mu B_\nu, \quad (2.4.5)$$

donde  $B'_\mu = \frac{g'_{\mu 5}}{g'_{55}}$ .

Integrando sobre la dimensión compacta  $x^5$  se obtiene la funcional de acción efectiva 4-dimensional

$$S_{eff} = \frac{1}{16\pi\hat{G}} \int d^4x \sqrt{-g} R^{(4)} - \int d^4x \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.4.6)$$

La primera integral es la acción de Einstein 4-dimensional. Sin embargo, de la segunda integral no nos es posible asociarla aún con la teoría electromagnética, es simplemente un término dinámico del campo vectorial  $B_\mu$  pero notemos lo siguiente, el tensor métrico transforma como un tensor del tipo (0,2) de la siguiente manera

$$\hat{g}_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \hat{g}_{\alpha\beta}, \quad (2.4.7)$$

particularmente, si calculamos la transformación de  $g_{\mu 5}$  llegamos a

$$\hat{g}_{\mu 5}(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^5}{\partial x'^5} g_{\nu 5} + \frac{\partial x^5}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^5}{\partial x'^5} g_{55}. \quad (2.4.8)$$

Considerando una traslación arbitraria a lo largo de la dimensión extra,

$$x'^\mu = x^\mu, \quad x'^5 = x^5 - \epsilon(x), \quad (2.4.9)$$

---

siendo  $\epsilon(x)$  una función escalar, obtenemos

$$B'_\mu(x') = \frac{g'_{\mu 5}}{g'_{55}} = B_\mu + \partial_\mu \epsilon(x). \quad (2.4.10)$$

Esto es,  $B_\mu$  transforma como el potencial electromagnético y debido a que las transformaciones de norma en electrodinámica son transformaciones locales de  $U(1)$ , podemos identificar  $B_\mu$  con el potencial electromagnético postulando que la dimensión extra sea geoméricamente un círculo.

La teoría de Brans-Dicke puede obtenerse como derivación de una teoría de Kaluza-Klein  $(4+d)$ -dimensional, en la cual, el campo escalar es generado por la presencia de dimensiones extras compactificadas. Para ver esto de manera más clara partimos de la funcional de acción de Einstein en vacío  $d$ -dimensional dada por

$$S = \frac{1}{16\pi\hat{G}} \int d^{(4+d)}x \sqrt{-\hat{g}} \hat{R}, \quad (2.4.11)$$

siendo

$$\hat{g}_{AB} = \begin{pmatrix} \hat{g}_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \hat{\phi}_{ab} \end{pmatrix}, \quad (2.4.12)$$

donde  $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$  y  $a, b = 4 + 1, \dots, d$ . Esto debido a la isotropía del espacio-tiempo. Integrando sobre las dimensiones extra obtenemos una teoría de Brans-Dicke en el frame de Jordan

$$S^{(BD)} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \Phi R - \frac{\omega}{\Phi} g^{\alpha\beta} \Phi_{;\alpha} \Phi_{;\beta} \right], \quad (2.4.13)$$

donde en este caso el parámetro libre de la teoría depende de la cantidad de dimensiones extra

$$\omega = -\frac{(d-1)}{d}. \quad (2.4.14)$$

A diferencia de la propuesta de unificación gravitoelectromagnética hecha por Kaluza y Klein, en el presente trabajo de tesis desarrollaremos un formalismo que nos permita precisamente realizar esta unificación sin recurrir a dimensiones extra. Sin embargo, antes de abordar esta nueva propuesta de formalismo de unificación, es conveniente primero abordar los fundamentos de la cosmología estándar, lo que haremos en el siguiente capítulo.

# Capítulo 3

## Cosmología

Como ya mencionamos, la teoría de la relatividad general de Einstein no es capaz de explicar sin problemas la presente expansión acelerada del Universo. Como un primer intento se introdujo nuevamente el término de constante cosmológica para generar una repulsión en la gravedad que explicara tal aceleración. Sin embargo, una de las dificultades que tiene este modelo cosmológico actual conocido como  $\Lambda$ -CDM o de concordancia, es que al realizar las mediciones correspondientes a la densidad de energía de vacío de las fluctuaciones cuánticas de los campos asociados con las interacciones fundamentales y compararlas con las observaciones existe una diferencia de  $10^{121}$  órdenes de magnitud, este problema es conocido como problema de la constante cosmológica. La reacción de la comunidad científica fue dejar de lado el problema original para resolver ahora los nuevos retos que presentaba la incorporación de tal término, introduciendo un campo escalar conocido en la literatura como campo de quinta esencia. Posteriormente han surgido muchas propuestas con la finalidad de explicar la aceleración en la expansión pero tratando de evitar el problema de la constante cosmológica [22].

Por otro lado, el modelo  $\Lambda$ -CDM predice una época en la evolución del universo conocida como inflación en la cual el Universo se expandió aproximadamente  $e^{60}$  veces en aproximadamente  $10^{-36} - 10^{-33}$  segundos. Esta etapa se introdujo con la finalidad de resolver problemas del modelo cosmológico del Big Bang tales como el problema del

horizonte y el problema de formación de estructura. Y que además, al igual que en los modelos de quinta esencia, involucra un campo escalar cuyo origen e interpretación ha sido una cuestión que algunos investigadores han tratado de descubrir. Entre las propuestas realizadas por la comunidad científica se encuentra que el origen de tal campo escalar pudiera ser geométrico, esto por lo menos en una geometría no-Riemanniana como por ejemplo del tipo Weyl-integrable.

Dicho lo anterior, esta unidad está estructurada de la siguiente manera: Comenzaremos caracterizando los modelos cosmológicos basados en el principio cosmológico. Éste consiste en afirmar que el universo es espacialmente homogéneo e isotrópico a gran escala, con gran escala nos referimos al orden de megapársecs Mpc, donde  $1\text{pc} = 3,0857 \times 10^{16}\text{m}$ , es decir, a partir de  $10^{28}\text{cm}$ . Continuaremos describiendo en que consiste un escenario inflacionario particularmente aquellos modelos alternativos que contienen un término cinético estándar. Presentaremos algunos problemas que presenta el modelo  $\Lambda$ -CDM y terminaremos mostrando la propuesta hecha por los modelos de quinta esencia interactuante para resolver dichos problemas.

### 3.1. Modelos homogéneos e isotrópicos del universo

A la idea de un universo espacialmente homogéneo e isotrópico a gran escala se le suele denominar principio cosmológico, este término fue introducido en 1933 por el astrónomo británico Edward Arthur Milne. La isotropía puede corroborarse por medio de observaciones de la radiación cósmica de fondo, mientras que de la homogeneidad se tiene una buena idea mediante la morfología de las galaxias.

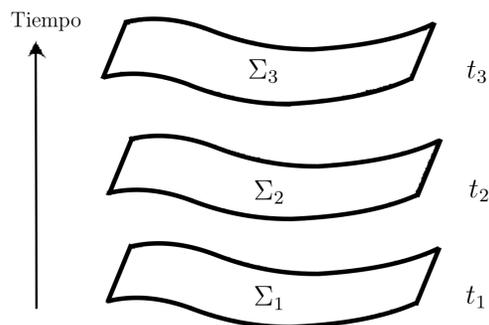


Figura 3.1: Hipersuperficies espaciales.

Dado que el espacio 3-dimensional es homogéneo e isotrópico, el espacio-tiempo puede ser foliado en una familia de hipersuperficies tridimensionales dadas por  $t = \text{cte}$ , en donde

---

cada elemento de la familia representa el espacio 3-dimensional en el instante  $t$ . Debido a que la superficie es isotrópica es particularmente esféricamente simétrica alrededor de un punto, el elemento diferencial de línea sobre este espacio en coordenadas esféricas  $(r^*, \theta, \phi)$  es de la forma estándar

$$d\Sigma^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = e^{\lambda(r^*)} dr^{*2} + r^{*2} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.1.1)$$

donde  $0 \leq r^* < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Además  $e^{\lambda(r^*)}$  es una función arbitraria que fijamos debido a la homogeneidad del espacio como se detalla a continuación.

Al considerar una hipersuperficie homogénea, la transformación en (1.1.14) nos permite tener isotropía en cada punto sobre la misma. En el espacio 3-dimensional hay tres vectores de Killing asociados con homogeneidad y tres asociados con isotropía; es decir seis vectores de Killing que es el número máximo permitido para  $n = 3$ . Por tanto, cuando el principio cosmológico requiere que en cada instante de tiempo nuestro universo sea espacialmente homogéneo e isotrópico, realmente está exigiendo que la variedad que modela nuestro universo admita una subvariedad de dimensión  $n = 3$  que sea máximamente simétrica. Así, de la ecuación (1.1.21) contrayendo los índices  $\alpha$  y  $\gamma$ , obtenemos

$$R_{\beta\gamma} = 2\kappa g_{\beta\gamma}. \quad (3.1.2)$$

cuyas ecuaciones no nulas son

$$2\kappa e^\lambda = \frac{\lambda'}{r^*}, \quad (3.1.3)$$

$$2\kappa r^{*2} = 1 + \frac{1}{2} r^* \lambda' e^{-\lambda} - e^{-\lambda}. \quad (3.1.4)$$

De las ecuaciones (3.1.3) y (3.1.4) se obtiene la función que buscamos del elemento diferencial de línea en (3.1.1)

$$e^{-\lambda} = 1 - \kappa r^{*2}. \quad (3.1.5)$$

De esta manera resulta finalmente

$$d\Sigma^2 = \frac{dr^{*2}}{1 - \kappa r^{*2}} + r^{*2} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad \kappa \in \mathbb{R}. \quad (3.1.6)$$

---

Este elemento diferencial de línea describe una hipersuperficie homogénea e isotrópica, sin embargo, con la finalidad de normalizar el valor de  $\bar{\kappa}$ , se introduce una nueva escala de longitud en la forma

$$r(r^*) = |\bar{\kappa}|^{\frac{1}{2}} r^*. \quad (3.1.7)$$

Escribiendo (3.1.6) en términos de  $(r, \theta, \phi)$  se obtiene

$$d\Sigma^2 = \frac{1}{|\bar{\kappa}|} dr^2 + \frac{r^2}{|\bar{\kappa}|} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad \bar{\kappa} \in \mathbb{R} \quad (3.1.8)$$

Definimos una curvatura efectiva  $\kappa$  como  $\kappa \equiv \frac{\bar{\kappa}}{|\bar{\kappa}|}$ ,  $\bar{\kappa} \in \mathbb{R}$

$$\text{si } \bar{\kappa} = 0 \Rightarrow \kappa = 0 \quad (3.1.9)$$

$$\text{si } \bar{\kappa} > 0 \Rightarrow \kappa = 1 \quad (3.1.10)$$

$$\text{si } \bar{\kappa} < 0 \Rightarrow \kappa = -1. \quad (3.1.11)$$

Estos valores representan un espacio plano, un espacio con curvatura positiva y un espacio con curvatura negativa respectivamente ya que al sustituir  $\kappa = \{0, 1, -1\}$  en (3.1.8) se obtiene el elemento diferencial de un plano, de una esfera y de una hiperboloide.

Un modelo cosmológico se construye a partir por una teoría de gravitación y un principio cosmológico, en este caso la teoría de la Relatividad general y el hecho de que el universo sea espacialmente homogéneo e isotrópico a gran escala. Para resolver las ecuaciones de campo de la teoría de la relatividad general bajo la suposición del principio cosmológico, necesitamos un tensor energía momento que también lo satisfaga. La forma más general de tensor energía momento con dicha característica es el de un fluido perfecto, que tiene la forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (3.1.12)$$

donde  $p = p(t)$  y  $\rho = \rho(t)$  son la presión del fluido y la densidad de energía del fluido respectivamente. Además  $u_\mu$  denota la cuadrivelocidad del fluido y de igual manera sólo tiene la componente temporal debido al principio cosmológico. Otra manera de interpretar esto último es estableciendo que la clase de observadores que toman medidas en el fluido se mueven junto con él, es decir, están en comovimiento con la expansión del universo.

---

Si suponemos que el universo está lleno de un fluido perfecto la ecuación de estado del fluido puede proponerse en general de la forma

$$p = \rho\omega, \quad (3.1.13)$$

donde  $\omega = 0$  para la materia,  $\omega = 1/3$  para la radiación y  $\omega = -1$  para el vacío, mientras que  $\omega < -1/3$  para la energía oscura en general. Esta ecuación es conocida en cosmología como ecuación barotrópica [21].

Las ecuaciones de campo de Relatividad general que contemplan el principio cosmológico son conocidas como ecuaciones de Friedmann y son dadas por

$$3\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = 8\pi G\rho, \quad (3.1.14)$$

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = 8\pi Gp, \quad (3.1.15)$$

donde  $a(t)$  es el factor de escala del universo. Como  $a(t)$  no es un observable, es común escribir las ecuaciones cosmológicas en términos del observable conocido como parámetro de Hubble  $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ , que mide la rapidez con la que se expande el universo. Se sigue de las ecuaciones (3.1.14) y (3.1.15) que la aceleración de la expansión del universo satisface

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (3.1.16)$$

Como ya mencionamos, el universo se expande acelerada o desaceleradamente dependiendo de si  $\ddot{a}$  es positiva o negativa. Se desprende de forma inmediata de esta ecuación que esto sucede dependiendo del tipo de material contenido en el universo, es decir, de su ecuación de estado. Por ejemplo, si tenemos un universo dominado por materia, este universo obedece una ecuación de estado de polvo  $p_m = 0$ , y como la densidad de energía es positiva por definición  $\rho_m > 0$ , se tendría un universo en expansión desacelerada. La expansión acelerada se logra cuando  $p < -1/3\rho$ , es decir, con una ecuación de estado barotrópica caracterizada por un parámetro de estado  $\omega < 0$ .

Otro observable cosmológico es el llamado parámetro de densidad denotado por  $\Omega$ , y se define por

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (3.1.17)$$

---

donde  $\rho_c$  es la densidad crítica de material contenido en el universo y  $\rho$  la densidad en un tiempo dado. Pudiera pensarse que solamente para un determinado tipo de materia o energía es posible definir este parámetro, sin embargo, también puede definirse un parámetro de densidad para la curvatura espacial mediante la expresión

$$\Omega_k = -\frac{k}{H^2 a^2}. \quad (3.1.18)$$

Es importante hacer notar que esta definición proviene directamente de la ecuación de Friedmann (3.1.14). Más aun, (3.1.14) queda escrita en términos del parámetro de densidad en la forma

$$\Omega + \Omega_k = 1. \quad (3.1.19)$$

De esta manera, dado que en un modelo abierto  $\Omega_k < 0$ , en un modelo plano  $\Omega_k = 0$  y en un modelo cerrado  $\Omega_k > 0$  tenemos

$$\Omega \begin{cases} > 1, & \text{para } k > 0, \\ = 1, & \text{para } k = 0, \\ < 1, & \text{para } k < 0. \end{cases} \quad (3.1.20)$$

Mediciones recientes de variaciones de la temperatura de radiación cósmica de fondo y la luminosidad aparente y corrimiento al rojo de supernovas del tipo Ia muestran que  $\Omega_0 = 1,04 \pm_{0,04}^{0,02}$ . Esto significa de acuerdo a (3.1.20) que el universo debe ser espacialmente plano a gran escala.

Este modelo cosmológico es conocido como modelo de la gran explosión o Big Bang. En este modelo se contemplan solo dos épocas en la evolución del universo, una primer época dominada por radiación y un segundo período dominado por materia. Lo que este modelo muestra es que independientemente de la curvatura del espacio ( $\kappa = \pm 1, 0$ ), en la época dominada por radiación el factor de escala es nulo en  $t = 0$  y el tensor de curvatura  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$  se va a infinito. Esto lleva a pensar, en el contexto de la teoría de la relatividad general, que en el universo hubo un estado de densidad de materia infinita con toda la materia y energía concentradas en un punto. Fue justamente esta característica la que llevo a Gamow a sugerir que el universo debía ser muy caliente en un inicio, de ahí que el universo

---

comenzara con una época dominada por radiación. Sin embargo, este modelo exhibe una serie de problemas que precisamente dieron lugar a extenderlo y proponer la existencia de un período inicial de expansión acelerada conocido como inflación. Explicaremos en que consisten los principales problemas del modelo de la gran explosión en la siguiente sección.

## 3.2. Problemas del modelo cosmológico de la gran explosión

### El problema del horizonte

El primer problema del modelo cosmológico de la gran explosión que consideraremos en esta sección es el llamado *problema del horizonte*. Para entender el problema es necesario primero introducir el concepto de horizonte. El tamaño de una región causal del espacio-tiempo se determina por que tan lejos puede viajar la luz en una cierta cantidad de tiempo. Recordemos que la manera que tenemos de medir distancias en un universo homogéneo e isotrópico en expansión es a través del elemento diferencial de línea

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\chi^2, \quad (3.2.1)$$

donde  $d\chi^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ . Sin embargo, en términos del tiempo conforme  $\tau$ , definido por

$$\tau = \int \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.2.2)$$

el elemento de línea (3.2.1) adquiere la forma

$$ds^2 = a^2(\tau) [d\tau^2 - d\chi^2]. \quad (3.2.3)$$

Así, se sigue de (3.2.3) que debido a que los fotones viajan a lo largo de geodésicas nulas,  $ds^2 = 0$ , su trayectoria está dada por la ecuación

$$\Delta\chi(\tau) = \pm\Delta\tau, \quad (3.2.4)$$

---

donde  $\Delta\chi = \chi_f - \chi_i$  y  $\Delta\tau = \tau_f - \tau_i$ . Esta ecuación implica que la distancia comóvil máxima que la luz puede viajar entre dos tiempos  $\tau_1$  y  $\tau_2 > \tau_1$  es simplemente  $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$ . Por tanto, si el universo inició con una singularidad en  $t_i = 0$ , entonces la distancia comovil más grande desde la cual un observador en el tiempo  $t$  será capaz de recibir una señal que viaja a la velocidad de la luz es dada por

$$\chi_{\text{ph}}(\tau) = \tau - \tau_i = \int_{t_i}^t \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.2.5)$$

Esta región se llama horizonte comovil de partícula y se caracteriza en que las influencias causales tienen que darse dentro de la misma, además nótese que cada observador tiene su propio horizonte.

Por otro lado, notemos que el tamaño del horizonte de partícula del universo observable en la actualidad  $\chi_{\text{obs},0}$  es aproximadamente de  $10^{28}$  cm. Dado que el universo se ha estado expandiendo, el tamaño de la región homogénea e isotrópica que observamos en tiempos tempranos era más pequeña. En la recombinación el tamaño  $\chi_{\text{obs},*}$  de la región homogénea e isotrópica que creció hasta el tamaño actual es dado por

$$\chi_{\text{obs},*} = \frac{a_*}{a_0} \chi_{\text{obs},0} \sim 10^{-3} \times 10^{28} \text{ cm} = 10^{25} \text{ cm}. \quad (3.2.6)$$

Sí comparamos ésto con el tamaño del horizonte de partícula en el tiempo de la recombinación  $\chi_{\text{cmb},*} \sim 10^{23}$  cm, se obtiene el cociente

$$\frac{\chi_{\text{obs},*}}{\chi_{\text{cmb},*}} \sim \frac{10^{25} \text{ cm}}{10^{23} \text{ cm}} \sim 10^2 \quad (3.2.7)$$

Así el CMB observado se puede dividir en  $10^2$  regiones que estuvieron causalmente desconectadas en el tiempo de la recombinación. Sin embargo, observaciones de CMB indican que esas regiones desconectadas en aquella época, tienen la misma temperatura ¿Cómo es esto posible? Este es el llamado problema del horizonte.

## El problema de planaridad

Una vez entendido en que consiste el problema del horizonte, ahora abordaremos el problema de planaridad. En este caso, si manipulamos la primera ecuación de Friedmann

---

(3.1.14), obtenemos

$$1 - \Omega(a) = \frac{-\kappa}{(aH)^2} \equiv -\kappa R_H^2, \quad (3.2.8)$$

donde  $\Omega(a) \equiv \frac{\rho(a)}{\rho_{crit}(a)} = \frac{\rho(a)}{3H^2(a)}$ . De esta manera, para un universo con curvatura positiva o negativa ( $\kappa = 1$  o  $\kappa = -1$ ) se cumple que

$$|1 - \Omega(a)| = \frac{1}{(aH)^2} \equiv R_H^2. \quad (3.2.9)$$

Según esta ecuación para un universo con una  $\kappa$  ligeramente distinta de 0, dado que  $H$  es decreciente necesariamente  $R_H$  debe aumentar con el tiempo y así  $|1 - \Omega|$  tendería a alejarse de la planitud i.e.  $|1 - \Omega| \neq 0$ . Sin embargo, lo que se observa en la actualidad es que el universo es espacialmente plano. Tras haber aumentado  $R_H$  varios órdenes de magnitud, ¿cómo puede seguir siendo la curvatura del universo tan próxima a 0?, es decir, ¿cómo  $|1 - \Omega_0| \approx 0$ ?

## Problema de Texturas Cósmicas

Otro de los problemas de gran importancia del modelo de la gran explosión es el llamado problema de texturas cósmicas. El problema radica en que si nuestro universo observable es, de acuerdo al principio cosmológico, tan homogéneo e isotrópico, entonces ¿Cuál es el origen de estructuras, como por ejemplo galaxias, observadas hoy en día?

Además, para poder explicar la estructura observada hoy en día, los modelos de formación de estructura indican que se requiere de condiciones iniciales del universo muy específicas, las cuales no encuentran una explicación en el modelo de la gran explosión.

En realidad se han asociado aun más problemas al modelo de la gran explosión, como por ejemplo el problema de monopolos magnéticos entre otros, sin embargo, históricamente estos fueron los principales. Con la finalidad de resolver estos y otros problemas se introdujo una etapa en el universo conocida como inflación cuya idea abordaremos en la siguiente sección.

---

### 3.3. Escenario inflacionario

Se conoce como inflación a la época del universo temprano en la cual el factor de escala satisface  $\ddot{a} > 0$ . En esta época, la expansión del universo es controlada por un campo escalar real conocido como inflatón, cuya elección de potencial genera diferentes modelos inflacionarios. De hecho, podemos encontrar en la literatura modelos inclusive con diferentes campos escalares reales y complejos jugando el mismo papel en cuanto a la generación de la aceleración en la expansión del universo. Los distintos modelos de inflación difieren en sus predicciones siendo esta característica la empleada para discriminar entre los diferentes modelos en concordancia o discordancia con las evidencias observacionales. Uno de los modelos más populares, debido a sus éxitos, es el modelo de Linde de Inflación caótica. Sin embargo también se tiene el modelo de inflación eterna, el modelo de inflación híbrida y muchos otros [23]. En esta sección abordaremos el formalismo inflacionario general que ha sido la base para cada uno de los modelos inflacionarios encontrados en la literatura.

Comenzaremos postulando la existencia de un campo escalar real  $\phi$ , cuya densidad lagrangiana es dada por

$$\mathcal{L} = \frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} - V(\phi), \quad (3.3.1)$$

donde  $R$  es la curvatura escalar,  $G = M_p^{-2}$  es la constante de gravitación de Newton,  $M_p = 1,2 \times 10^9 \text{Gev}$  es la masa de Planck,  $V(\phi)$  es el potencial del campo. Se sigue de (3.3.1) que el tensor energía momento asociado al campo escalar es de la forma

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} - 2V(\phi)). \quad (3.3.2)$$

Es fácil mostrar que para la métrica (3.2.1) se obtiene que la densidad de energía y la presión asociadas al campo  $\phi$ , cuando se impone el principio cosmológico, son

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.3.3)$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.3.4)$$

---

El parámetro de la ecuación de estado queda entonces dado por

$$\omega = \frac{p}{\rho} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}. \quad (3.3.5)$$

Nótese que para tener una ecuación de estado que describa un material que genere una expansión acelerada en el universo, se requiere que  $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ . A esta última condición se le conoce como de rodadura lenta. Y así, se llega a

$$p \simeq \frac{-V(\phi)}{V(\phi)}\rho = -\rho, \quad (3.3.6)$$

que es conocida como ecuación de estado inflacionaria y garantiza una expansión acelerada. Sin embargo es importante obtener una determinada cantidad de aceleración para no tener los problemas del modelo de la gran explosión. Esto se hace mediante la introducción de ciertos parámetros conocidos como parámetros de rodadura lenta que estudiaremos un poco más adelante.

Por otro lado, la ecuación de conservación de la energía (2.3.16) para (3.3.3) y (3.3.4) resulta ser

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V'(\phi) \quad (3.3.7)$$

De esta manera, las ecuaciones de Friedmann (3.1.14) y (3.1.15) adquieren la forma

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_{\text{p}}^2} \left( \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \right) \quad (3.3.8)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi}{3M_{\text{p}}^2} \left( \dot{\phi}^2 - V \right). \quad (3.3.9)$$

Se sigue de la ecuación (3.3.9) que  $\ddot{a} > 0$  cuando  $V > \dot{\phi}^2$ . Sin embargo, como se ha comentado anteriormente, la cantidad de aceleración en la expansión se controla mediante la condición de rodadura lenta. Una manera más precisa de obtener tal control es mediante los llamados parámetros de rodadura lenta del campo  $\eta$  y  $\varepsilon$ . La idea es que durante inflación debe cumplirse que

$$\|\eta\| \ll 1, \quad \|\varepsilon\| \ll 1, \quad (3.3.10)$$

donde estos parámetros son definidos por

$$\eta = \frac{M_{\text{p}}^2 V''}{8\pi V}, \quad (3.3.11)$$

$$\varepsilon = \frac{M_{\text{p}}^2}{16\pi} \left( \frac{V'''}{V} \right)^2. \quad (3.3.12)$$

Durante inflación estos parámetros van tomando valores crecientes positivos de acuerdo a (3.3.10), de tal manera que al finalizar inflación su valor es  $\|\eta\| = 1$  y  $\|\varepsilon\| = 1$ . Las condiciones (3.3.10) son llamadas de rodadura lenta debido a que implican  $\dot{\phi}^2 \ll V$ , que técnicamente nos dice que la energía potencial del campo es dominante sobre su energía cinética. Esto puede interpretarse como que el campo escalar  $\phi$  'rueda' lentamente hacia el mínimo del potencial  $V$ . Para cerciorarnos de esto, es necesario ver rápidamente las implicaciones de (3.3.10).

Debido a las condiciones (3.3.10) es posible despreciar los términos  $\ddot{\phi}$  y  $\frac{\dot{\phi}^2}{2}$  en las ecuaciones (3.3.7) y (3.3.8), con lo que se obtiene

$$3H\dot{\phi} = -V', \quad (3.3.13)$$

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_{\text{p}}^2} V. \quad (3.3.14)$$

La derivada de la ecuación (3.3.13) es

$$\ddot{\phi} = -\frac{V''\dot{\phi}}{3H} + \frac{\dot{H}\dot{\phi}}{H}. \quad (3.3.15)$$

Empleando las ecuaciones (3.3.13) y (3.3.14) la ecuación (3.3.15) puede describirse como

$$\ddot{\phi} = (-\eta + \varepsilon) H\dot{\phi}, \quad (3.3.16)$$

donde  $\eta$  y  $\varepsilon$  son los parámetros de rodadura lenta que definimos en (3.3.11) y (3.3.12). De la ecuación (3.3.16) encontramos que  $\ddot{\phi} \ll H\dot{\phi}$  esto es, el término  $\ddot{\phi}$  en la ecuación (3.3.7) se puede despreciar. Además, de las ecuaciones (3.3.13) y (3.3.14) se sigue la condición de rodadura lenta

$$\dot{\phi}^2 = \frac{V'^2}{9H^2} = \frac{M_{\text{p}}^2 V'^2}{24\pi V} = \frac{2}{3}\varepsilon V \ll V, \quad (3.3.17)$$

que nos permite despreciar el término  $(1/2)\dot{\phi}^2$  de la ecuación (3.3.8) y el término  $\dot{\phi}^2$  en la ecuación (3.3.9), lo que nos lleva a tener una expansión acelerada.

---

El parámetro  $\varepsilon$  también nos dice que tan rápido cambia el parámetro de Hubble. Esto se puede ver de la siguiente manera. Diferenciando la ecuación (3.3.14) obtenemos

$$\frac{\dot{H}}{H} = \frac{4\pi}{3M_{\text{P}}^2} \frac{V'}{H^2} \dot{\phi} = \frac{1}{2} \frac{V'}{V} \dot{\phi} \quad (3.3.18)$$

Dividiendo entre  $H$ , sustituyendo por  $\dot{\phi}$  de la ecuación (3.3.13) y entonces para  $H^2$  de (3.3.14) tenemos

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3M_{\text{P}}^2}{16\pi} \left(\frac{V'}{V}\right)^2. \quad (3.3.19)$$

Por tanto,

$$\dot{H} = -\varepsilon H^2. \quad (3.3.20)$$

Esto muestra que el parámetro de Hubble cambia muy lentamente durante el periodo en el que el campo rueda lentamente ya que

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1. \quad (3.3.21)$$

Por otro lado, el número de desdoblamientos durante inflación es definido por

$$N = \ln \left( \frac{a_f}{a_i} \right) \quad (3.3.22)$$

donde  $a_i$  y  $a_f$  son los valores iniciales y finales del factor de escala. En la aproximación de rodadura lenta el potencial es aproximadamente constante en el tiempo, y por tanto, de acuerdo a la ecuación (3.3.14), el parámetro de Hubble es cuasiconstante.

Como mencionamos anteriormente, uno de los modelos inflacionarios con más éxito es el modelo de inflación caótica propuesto por Andrei Linde. En este modelo se elige un potencial polinomial de un campo masivo no-interactuante de la forma

$$V = \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (3.3.23)$$

En este caso los parámetros de rodadura lenta son

$$\eta = \varepsilon = \frac{M_{\text{P}}^2}{4\pi\phi^2} \quad (3.3.24)$$

---

Entonces inflación puede ocurrir si  $\|\phi\| > M_{\text{P}}/\sqrt{4\pi}$ . Las soluciones de las ecuaciones (3.3.7) y (3.3.8) son en este caso

$$\phi(t) = \phi_i - \frac{mM_{\text{P}}}{2\sqrt{3\pi}}t, \quad (3.3.25)$$

$$a(t) = a_i \exp \left[ \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{m}{M_{\text{P}}} \left( \phi_i t - \frac{mM_{\text{P}}}{4\sqrt{3\pi}}t^2 \right) \right]. \quad (3.3.26)$$

El número de desdoblamientos exponenciales es

$$N = 2\pi \frac{\phi_i^2}{M_{\text{P}}^2} - \frac{1}{2}. \quad (3.3.27)$$

Los problemas del modelo de la gran explosión mencionados en la sección anterior son resueltos dentro de un contexto inflacionario. Por ejemplo, para resolver el problema del horizonte requerimos al menos que el universo observable actual esté dentro del radio comóvil de Hubble al inicio de inflación, es decir,

$$(a_0 H_0)^{-1} < (a_I H_I)^{-1}. \quad (3.3.28)$$

Si asumimos que el universo estuvo dominado por radiación desde el final de inflación, i.e., que  $H \propto a^{-2}$ , esto nos lleva a

$$\frac{a_0 H_0}{a_E H_E} \sim \frac{a_0}{a_E} \left( \frac{a_E}{a_0} \right)^2 = \frac{a_E}{a_0} \sim \frac{T_0}{T_E} \sim 10^{-28}, \quad (3.3.29)$$

donde  $T_E \sim 10^{15}$  GeV and  $T_0 = 10^{-13}$  GeV. De aquí que

$$\frac{a_E}{a_I} > 10^{28} \Rightarrow \ln \left( \frac{a_E}{a_I} \right) > 64, \quad (3.3.30)$$

y de esta manera tenemos

$$a_E > a_I e^{64}. \quad (3.3.31)$$

Esto nos dice que el problema del horizonte no aparezca se requiere mínimo de 60 desdoblamientos exponenciales de inflación. Como consecuencia de esto,  $R_H$  sufre un fuerte decrecimiento y tendríamos que para distintos valores iniciales de la curvatura

$$|1 - \Omega(a)| \rightarrow 0, \quad (3.3.32)$$

---

es decir, el universo acabaría siendo prácticamente plano. El hacer mucho más genéricas las condiciones iniciales elimina la posibilidad de considerar un ajuste fino para las condiciones iniciales de curvatura del universo.

Por otro lado, la etapa de la Teoría de la Gran Unificación (TGU) finaliza con la ruptura de simetría entre la fuerza fuerte y la electrodébil mediante una transición de fase de primer orden. Esta transición crea defectos topológicos en forma de monopolos magnéticos. Su longitud de correlación es menor que el horizonte de partículas en dicha época, y se espera encontrar un monopolo por cada 10 intersecciones entre tales horizontes, lo que se traduce en una alta densidad de monopolos  $\rho_m$ . Cada monopolo posee una masa  $m_M$ , con una energía similar al calor latente de la transición de fase, del orden de  $10^{15}$  GeV en el momento de su formación. Con la evolución del universo hasta la actualidad, la densidad de monopolos esperada es  $\rho_{m0} \approx 4,5 \text{ GeV } m^{-3}$ , un valor alto, de hecho serían predominantes en el Universo.

Si los modelos de unificación son correctos, ¿qué podría haber ocasionado la ausencia o drástica disminución en  $\rho_{m0}$ ?

Sin embargo, si se compara el factor de escala antes  $t_a$  y después  $t_d$  de inflación,  $\frac{a(t_d)}{a(t_a)} \geq 10^{26}$ , con lo que se cumple que

$$\left(\frac{a(t_d)}{a(t_a)}\right)^{-3} \leq 10^{-78}, \quad (3.3.33)$$

ya que  $\rho(t) \propto a^{-3}(t)$  para los monopolos (como con la materia). Así, debido a que la inflación cósmica aumenta enormemente el  $\chi_p$ , y la longitud de correlación de la transición de fase es el orden del tamaño  $\chi_p$ , la inflación será capaz de reducir la densidad de energía de los defectos topológicos existentes antes de la inflación, incluyendo la de los monopolos  $\rho_m$ , hasta un valor extremadamente bajo, en el que no habría ningún monopolo en nuestro universo observable en la actualidad  $\rho_m \rightarrow 0$ .

Durante el periodo inflacionario las fluctuaciones cuánticas del inflatón juegan un papel muy importante pues son los puntos de partida para el proceso de generación de estructura además de que llevan a la predicción de un espectro de potencias de ondas gravitacionales y anisotropías en la temperatura del fondo cósmico de radiación, ambas

---

detectables observacionalmente. Las fluctuaciones a pequeña escala son de naturaleza cuántica, sin embargo al traspasar el horizonte causal pierden su coherencia cuántica y pueden considerarse como clásicas a escala cosmológica ( $\lambda \gg H^{-1}(t)$ ). En este sentido, las fluctuaciones a escalas mayores a la del horizonte causal son consideradas las semillas para la posterior formación de estructura. Sin embargo, sus amplitudes deben ser muy pequeñas  $\delta\rho/\rho \simeq 10^{-5}$ , ya que de lo contrario no se tendría concordancia con los resultados observacionales proporcionados por la radiación cósmica de fondo.

El proceso de inflación finaliza cuando el campo  $\varphi$  asume valores muy cercanos al mínimo absoluto del potencial escalar. Al término de inflación le sigue el periodo de recalentamiento y posteriormente la teoría de la gran explosión implica el resto de la evolución del Universo (sin contar el periodo de presente expansión acelerada). Este es el esquema general del escenario inflacionario sin considerar los efectos cuánticos. Sin embargo, una manera de incluir las contribuciones cuánticas es a través de la aproximación semi-clásica, que abordaremos posteriormente.

Dada la expansión acelerada y superlumínica generada por el campo escalar, la geometría se suaviza de tal manera que es bien descrita por la métrica de *FRW*, espacialmente plana

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dr^2, \quad (3.3.34)$$

donde  $a(t)$  es el factor de escala del Universo y  $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ . La dinámica de  $\varphi$  es dada por las ecuaciones de Euler-Lagrange y la dinámica correspondiente al factor de escala  $a(t)$  es dada por la ecuación de Friedmann semi-clásica, ambas dadas por

$$\ddot{\varphi} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 \varphi + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0, \quad (3.3.35)$$

$$\left\langle \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right\rangle = \frac{4\pi}{3M_p^2} \left\langle \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{a^2} (\nabla\varphi)^2 + 2V(\varphi) \right\rangle, \quad (3.3.36)$$

donde  $V'(\varphi) \equiv \frac{dV(\varphi)}{d\varphi}$ . Las ecuaciones (3.3.35) y (3.3.36) son ecuaciones operatoriales, pues el campo escalar es en general cuántico. Dada la interacción del campo escalar, no es fácil definir un espacio de funciones sobre el que actúa el operador  $\varphi$ . Si tal espacio no es bien definido, las ecuaciones (3.3.35) y (3.3.36) no tienen sentido. Por consistencia con

---

la métrica de FRW, el valor de expectación del campo se supone sólo dependiente del tiempo, pues debe recuperarse la homogeneidad e isotropía a gran escala definida por la métrica.

Dada la dificultad de resolver las ecuaciones (3.3.35) y (3.3.36), se construye una teoría semiclásica mediante la llamada aproximación semiclásica del campo escalar. Esto último significa que se descompone al operador inflatón en un campo clásico  $\phi_c$ , más una corrección cuántica descrita por el operador  $\phi$ . Esta descomposición es dada por

$$\phi(\bar{x}, t) = \phi_c(t) + \delta\phi(\bar{x}, t), \quad (3.3.37)$$

donde por consistencia debe considerarse  $\langle \delta\phi(\bar{x}, t) \rangle = 0$  y  $\langle \phi(\bar{x}, t) \rangle = \phi_c(t)$ . De aquí que el estado cuántico de  $\phi$  no es el vacío. Sin embargo, actúa como vacío de la componente cuántica  $\delta\phi$ . De este modo, sustituyendo (3.3.37) en (3.3.35), puede verse fácilmente que ambas dinámicas, cuántica y clásica de  $\phi$  pueden ser descritas separadamente. La ecuación para  $\phi_c$  describe la dinámica clásica de  $\phi$  y la expresión para  $\delta\phi$  su correspondiente parte cuántica. Por simplicidad comenzaremos con la parte clásica.

### Dinámica clásica del inflatón

Dado un estado cuántico arbitrario  $|E\rangle$ , se define la componente clásica  $\phi_c$  del campo inflatón  $\phi$  por  $\langle E | \phi | E \rangle = \phi_c$ . Sustituyendo (3.3.37) en (3.3.35) elegimos un  $\phi_c$  que satisface

$$\ddot{\phi}_c + 3H\dot{\phi}_c + V'(\phi_c) = 0. \quad (3.3.38)$$

Sustituyendo (3.3.37) en (3.3.36) y derivando con respecto del tiempo, la dinámica clásica tanto del parámetro de Hubble como del inflatón es caracterizada por

$$\dot{\phi}_c = -\frac{M_p^2}{4\pi} H'_c, \quad (3.3.39)$$

$$\dot{H}_c = H'_c \dot{\phi}_c = -\frac{M_p^2}{4\pi} (H'_c)^2. \quad (3.3.40)$$

Reemplazando estas ecuaciones en la expresión (3.3.36) se obtiene

$$V(\phi_c) = \frac{3M_p^2}{8\pi} \left( H_c^2 - \frac{M_p^2}{12\pi} (H'_c)^2 \right). \quad (3.3.41)$$

Esta ecuación relaciona el potencial escalar clásico con el parámetro clásico de Hubble  $H_c = H(\phi_c) = \dot{a}_c/a_c$ . Más aún, las ecuaciones (3.3.40) y (3.3.41) definen la evolución clásica del espacio-tiempo determinada por el potencial clásico  $V(\phi_c)$  durante la época inflacionaria. Durante esta era, el factor de escala satisface la condición  $\ddot{a} > 0$  y crece muy rápidamente. Así mismo, la ecuación (3.3.40) nos indica que  $\dot{H}_c < 0$ , lo que implica que  $H_c$  es una función decreciente del tiempo.

La escala temporal característica de rodadura del campo  $\phi_c$  puede definirse por  $\tau_d = \frac{\phi_c}{\dot{\phi}_c}$ , y su relación con el parámetro de Hubble está dada por

$$\nu \equiv \frac{\tau_d}{\tau_H} = \tau_d H = \frac{H \phi_c}{\dot{\phi}_c} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{2\pi}{M_p} \frac{\phi_c}{\dot{\phi}_c} \rho^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.42)$$

donde  $\rho \sim V(\phi_c)$  es la densidad de energía durante el periodo inflacionario.

### Dinámica cuántica del inflatón

Implementando la aproximación semiclásica en (3.3.35), la dinámica del operador cuántico  $\delta\phi$  es dada por

$$\ddot{\delta\phi} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 \delta\phi + 3H \dot{\delta\phi} + \sum_n \frac{1}{n!} V^{(n+1)}(\phi_c) \delta\phi^n = 0, \quad (3.3.43)$$

donde por definición  $\langle 0|\delta\phi|0\rangle = \langle \delta\phi \rangle = 0$ , con lo cual puede probarse que  $\langle \dot{\delta\phi} \rangle = 0$ .

Por otro lado, esta expansión semiclásica permite expandir el parámetro de Hubble  $H(t)$  en torno a su valor clásico  $H_c$ , obteniéndose

$$H = H_c \left[ 1 + \frac{1}{2H_c^2} \left\langle \dot{\delta\phi}^2 + \frac{1}{a^2} (\nabla \delta\phi)^2 + \sum_n \frac{1}{n!} V^{(n+1)}(\phi_c) \delta\phi^n \right\rangle \right], \quad (3.3.44)$$

donde  $H_c$  es dado por

$$H_c^2 = \frac{4\pi}{3M_p^2} \left[ \dot{\phi}_c^2 + 2V(\phi_c) \right]. \quad (3.3.45)$$

La expresión (3.3.44) nos indica que si las fluctuaciones cuánticas del inflatón son lo suficientemente pequeñas, entonces el parámetro de Hubble puede considerarse como clásico  $H \simeq H_c$ . En este régimen, una aproximación lineal de la ecuación (3.3.43) es suficiente

para tener una buena descripción de la dinámica de las fluctuaciones cuánticas. Haciendo esto, la expresión (3.3.43) llega a ser

$$\delta\ddot{\phi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\delta\phi + 3H_c\dot{\delta\phi} + V''(\phi_c)\delta\phi = 0. \quad (3.3.46)$$

Cabe mencionar que aunque esta descripción se considera suficiente, un análisis más completo incluiría las fluctuaciones cuánticas del parámetro de Hubble generadas por  $\delta\phi$ . Lo mismo sería para el caso de la ecuación de movimiento (3.3.51). Es importante notar en este análisis que la componente clásica  $\phi_c$  es responsable de la expansión del universo, mientras que las fluctuaciones cuánticas  $\delta\phi$  espacialmente inhomogéneas generan las fluctuaciones en la densidad de energía que bajo ciertas condiciones darán origen a la formación de estructura una vez finalizada la época inflacionaria.

En el caso de considerarse un acoplamiento no mínimo del campo  $\phi$  con la gravedad, la masa efectiva  $V''(\phi_c)$  cambiaría su evolución temporal ocasionando variaciones en la tasa de expansión del universo y modificando por tanto la dinámica de la componente clásica de  $\phi$ .

El estudio de la componente cuántica se simplifica, si redefinimos el campo  $\delta\phi$  de modo que la ecuación de movimiento (3.3.51) no tenga un término de primer orden en sus derivadas. Para ello hacemos la transformación  $\delta\phi = e^{-\frac{3}{2}H_c t}\chi$ . Con esta redefinición la ecuación (3.3.51) adquiere la forma

$$\ddot{\chi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\chi - \frac{k_0^2}{a^2}\chi = 0, \quad (3.3.47)$$

donde  $k_0^2 = a^2 \left( \frac{9}{4}H^2 + \frac{3}{2}\dot{H} - V_c'' \right)$ . Esta ecuación es de tipo Klein-Gordon en un espacio-tiempo curvo, isótropo y homogéneo en la cual  $\chi$  puede interpretarse como un campo escalar libre con un parámetro de masa efectivo  $\mu(t) = \frac{k_0}{a}$ , dependiente del tiempo.

Es posible hacer una expansión de Fourier del campo  $\chi$  en términos de los modos  $\xi_k(t)$  en la forma

$$\chi(\bar{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left[ a_k e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}} \xi_k(t) + a_k^\dagger e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}} \xi_k^*(t) \right], \quad (3.3.48)$$

donde los operadores de creación y aniquilación satisfacen las reglas de conmutación para bosones

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta^3(\bar{k} - \bar{k}'), \quad [a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0 \quad (3.3.49)$$

mientras que los modos  $\xi_k(t)$  están definidos por la ecuación de movimiento

$$\ddot{\xi}_k + \omega_k^2(t)\xi_k = 0 \quad (3.3.50)$$

con  $\omega_k^2 = a^{-2}(k^2 - k_0^2)$ . Aquellos modos cuyo número de onda  $k$  sea menor que  $k_0$ , tendrán frecuencia imaginaria, y por lo tanto serán inestables. Lo que implica un crecimiento exponencial de los modos, en particular con respecto al horizonte. Estos modos están asociados a longitudes de onda larga, y cumplen con la condición

$$k < \left[ \frac{9}{4}H^2 + \frac{3}{2}\dot{H} - V_c'' \right]^{1/2} a \quad (3.3.51)$$

para  $\frac{9}{4}H^2 + \frac{3}{2}\dot{H} - V_c'' > 0$ . La función  $k_0(t)$  es el número de onda que delimita el sector infrarrojo inestable del sector asociado a longitudes de onda corta. Como  $k_0$  aumenta con el tiempo, algunos modos que en un principio estaban en el sector de onda corta pasarán al sector de onda larga. Este punto es importante, y sobre él se basa la definición del campo promedio en un tratamiento estocástico. Para que la teoría sea consistente, los campos  $\chi$  y  $\dot{\chi}$  deben cumplir con las relaciones canónicas de conmutación

$$[\chi(\bar{r}, t), \dot{\chi}(\bar{r}', t')] = i\delta^3(\bar{r} - \bar{r}'). \quad (3.3.52)$$

Para ello debe de satisfacerse la relación de consistencia entre los modos, dada por

$$\xi_k(t)\dot{\xi}_k^*(t) - \dot{\xi}_k(t)\xi_k^*(t) = i. \quad (3.3.53)$$

Esta ecuación nos permite normalizar los modos satisfaciéndose la condición (3.3.52).

En términos generales la dinámica inflacionaria nos da un mecanismo para la generación causal de perturbaciones primordiales en la densidad de energía. Esto puede verse a través de las ecuaciones (3.3.50) y (3.3.51). Los modos en el sector UV se clasicalizan al ingresar al sector IR. Esto puede constatarse al satisfacerse la condición  $[\chi_{IR}(\bar{r}, t), \dot{\chi}_{IR}(\bar{r}', t)] = 0$ , donde  $\chi_{IR}$  tiene en cuenta sólo aquellos modos mucho mayores que el horizonte de Hubble

$$\chi_{IR}(t, \bar{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \Theta(\epsilon k_0(t) - k) \left[ a_k e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}} \xi_k(t) + a_k^\dagger e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}} \xi_k^*(t) \right], \quad (3.3.54)$$

---

con  $\epsilon = 10^{-3}$  y  $\Theta$  siendo la función escalón. De esta manera, estos modos se asocian con las fluctuaciones en la densidad de energía confirmándose que inflación nos proporciona el mecanismo causal que resuelve los problemas del modelo de la gran explosión.

### 3.4. Modelo cosmológico estándar

Hoy en día se acepta al modelo  $\Lambda$ -CDM, abreviatura empleada en cosmología para Lambda-Cold Dark Matter, como el modelo más simple existente concordante con las evidencias observacionales hasta ahora. Este modelo se usa para describir el contenido de materia del universo, aproximadamente un 70% de Energía Oscura (DE), un 25% de Materia Oscura fría (CDM) y un 5% de materia visible normal. Sin embargo, como mencionaremos más a detalle posteriormente, el modelo enfrenta un problema grave, el de la constante cosmológica. El problema radica en la diferencia de 121 ordenes de magnitud entre el valor de la constante cosmológica requerida para explicar la presente expansión acelerada del universo, y el valor predicho por la teoría cuántica de campos que asume que tal constante corresponde a la densidad de energía promedio de las fluctuaciones de vacío de los campos cuánticos. A este modelo también se le conoce en la literatura como modelo cosmológico estándar o de concordancia cósmica.

De acuerdo a este modelo, el universo empieza con una gran explosión, hace aproximadamente 13.7 billones de años. Por un pequeño tiempo, se expandió muy rápido (inflación); ha continuado expandiéndose desde entonces. Y se piensa que las estructuras que vemos actualmente, galaxias y demás, se han desarrollado como resultado de interacciones gravitacionales entre la materia oscura y la materia ordinaria.

El universo pasó por cuatro etapas sucesivas: inflación; confinamiento de quarks; nucleosíntesis y recombinación. En la primera etapa el universo estuvo comprimido en un estado muy denso que se expandió rápidamente. Una cienmilésima de segundo después del instante inicial, la temperatura era lo suficientemente baja para que todos los quarks se confinaran en protones y neutrones. Según el modelo cosmológico estándar no quedaron quarks libres en el universo y, efectivamenre, lo que observamos hoy en día es que los

---

quarks forman siempre parte de protones y neutrones. La nucleosíntesis es un proceso en el que los protones y neutrones reaccionan para dar lugar a núcleos de otros átomos. Pero la mayor parte de los protones quedaron libres, casi el 75 % del universo seguían siendo núcleos de hidrógeno (un protón en su núcleo). Los nuevos núcleos que se formaron en esta etapa son los núcleos de helio (dos protones en su núcleo) aproximadamente en un 25 % y en una proporción inferior se formaron núcleos de deuterio (un protón con un neutrón en su núcleo) y núcleos de litio (con tres y cuatro protones en su núcleo). Transcurridos tres minutos desde el origen las reacciones nucleares cesaron su actividad porque la temperatura del universo ya se había enfriado lo suficiente. Como resultado, el elemento químico más abundante del universo es el hidrógeno, seguido por el helio. Cuatrocientos mil años después, los núcleos de hidrógeno capturan electrones convirtiéndose en átomos neutros, en la etapa que se llama recombinación. Los fotones emitidos justo después de la recombinación dan lugar a lo que se conoce como radiación CMB o Fondo de Radiación Cósmica y que lleva en sí las características del universo de esa época. Los fotones ya no tienen la energía suficiente para ser absorbidos por los electrones (a su vez, los electrones ya no pueden absorber fotones que los liberen de los átomos neutros). Los fotones pueden viajar desde entonces por el universo sin ser absorbidos por la materia hasta llegar hasta nosotros.

Las observaciones cosmológicas pueden ser explicadas en su mayoría dentro de esta teoría. Sin embargo, nadie sabe qué es la energía oscura ni porque su densidad de energía y la densidad de materia coinciden ahora. El modelo  $\Lambda$ -CDM es descrito por la funcional de acción

$$S = \frac{1}{16\pi\mathcal{G}} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \quad (3.4.1)$$

donde  $\Lambda$  representa la constante cosmológica. Las ecuaciones de campo para esta teoría son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^\Lambda) \quad (3.4.2)$$

donde  $T_{\mu\nu}^\Lambda = \rho_\Lambda g_{\mu\nu}$  siendo el término  $\rho_\Lambda$  constante y proporcional a la constante cos-

---

mológica  $\Lambda$ . Las ecuaciones de Friedmann para esta teoría resultan de la forma

$$3\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = 8\pi G\rho + \Lambda, \quad (3.4.3)$$

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = 8\pi Gp - \Lambda. \quad (3.4.4)$$

De estas ecuaciones encontramos que la aceleración de la expansión del universo es

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (3.4.5)$$

De aquí podemos observar que si tenemos un universo dominado por la constante cosmológica tendremos una expansión acelerada.

Este modelo tiene dos principales problemas, el primero es conocido como problema de la constante cosmológica que consiste básicamente en preguntarse que interpretación física tiene dicha constante. De la teoría cuántica de campos podríamos asociarla con la energía de vacío de las fluctuaciones cuánticas de los campos asociados con las interacciones fundamentales. Esta teoría predice una densidad de energía de  $\rho_{vac,th} = 10^{74}\text{GeV}^4$ , por otro lado, observacionalmente sabemos que la densidad de energía asociada con la constante cosmológica es de  $\rho_{vac,ob} = 10^{-47}\text{GeV}^4$ , es decir existe una diferencia de 121 órdenes de magnitud. Para resolver este problema se propusieron los modelos de quinta esencia que consisten en proponer que la energía oscura es descrita por un campo escalar dinámico cuya densidad de energía pudo ser como la predicha por la teoría cuántica de campos, pero cuyo valor actual es el que se mide observacionalmente.

Una manera de resolver el problema de coincidencia cósmica es permitiendo que haya interacción entre la energía oscura y la materia oscura. Esto es descrito a través de un término fuente  $\delta$  en las ecuaciones de conservación de la energía

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = \eta, \quad (3.4.6)$$

$$\dot{\rho}_s + 3H(\rho_s + p_s) = -\eta. \quad (3.4.7)$$

De esta manera no sería extraño encontrar una etapa en la que ambas densidades coincidan. Sin embargo, este modelo propuesto por Zimdhal y Pavon no predice la cantidad de

---

elementos químicos que se formaron en en el universo debido a la presencia de la materia oscura.

Una propuesta distinta que explica la expansión acelerada del universo está asociada con la geometría del espacio-tiempo. A diferencia del modelo cosmológico estándar, trabajos recientes muestran que la presente expansión acelerada del universo puede explicarse sin la necesidad de recurrir a energía oscura como se muestra en [12].

## Capítulo 4

# Teoría escalar-tensorial de norma en una geometría de Weyl-Integrable

En este capítulo desarrollaremos la parte nueva de este trabajo de tesis. Partiremos de una teoría escalar-tensorial de la gravedad y mostraremos que de acuerdo al principio variacional de Palatini, la geometría de fondo apropiada no es la de Riemann sino la de Weyl-Integrable. Con esta modificación veremos que el grupo de simetrías geométricas incrementa y por ende la acción original deja de ser un invariante. Esto último nos lleva a la necesidad de construir una nueva acción en donde para lograr la invariancia aparece una derivada de norma y con ella un nuevo campo vectorial interno. En términos simples podemos decir que en ese momento se tiene una teoría escalar-tensorial de norma o una teoría escalar-tensorial-vectorial en donde el campo vectorial tiene un origen geométrico. Posteriormente haremos un análisis de la teoría en dos frames o normas. El frame de Weyl y el frame de Riemann. Lo interesante de nuestro enfoque es que en el frame de Riemann el campo vectorial puede asociarse al campo electromagnético dando así lugar a una teoría de gravitoelectromagnetismo diferente a las propuestas que encontramos en la literatura. Haremos dos aplicaciones de esta teoría en el contexto de la cosmología moderna. Una aplicación es en ambito de los modelos de quinta esencia interactuante y la segunda en el contexto de cosmología inflacionaria.

---

Para comenzar con nuestro análisis formal es conveniente primero dejar claro a qué nos referiremos cuando decimos tener una invariancia de norma. Matemáticamente esto significa que al realizar una transformación continua local de algún campo que aparezca en nuestra teoría, las ecuaciones de campo resultan ser exactamente las mismas. Nótese que la lagrangiana no es necesariamente invariante bajo la transformación, sino que se permite que tenga dependencia de términos adicionales tales que al imponer las condiciones de frontera en el proceso variacional estos desaparezcan. Una teoría física con esta característica de invariancia de norma se le conoce como teoría de norma. Como ejemplo, que además nos será de utilidad para referenciar más adelante, consideraremos la primera teoría conocida de este tipo, la teoría electromagnética. La densidad Lagrangiana que describe las interacciones electromagnéticas es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + j^\mu A_\mu. \quad (4.0.1)$$

En este caso el potencial vectorial  $A_\mu$  toma sus valores en el álgebra del grupo de norma Abeliano  $U(1)$  que definimos mediante la transformación

$$U(x) = e^{-i\Omega(x)} \quad (4.0.2)$$

donde  $\Omega(x)$  es un campo escalar real diferenciable. De manera general, la transformación de norma para un grupo  $G$  es de la siguiente manera

$$A'_\mu = UA_\mu U^\dagger - iU\partial_\mu U^\dagger. \quad (4.0.3)$$

En el caso del grupo Abeliano  $U(1)$  tenemos

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\Omega(x). \quad (4.0.4)$$

Considerando esta transformación, la densidad Lagrangiana (4.0.1) bajo la transformación de norma (4.0.4) resulta ser

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4}F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} + j^\mu A'_\mu - j^\mu\partial_\mu\Omega. \quad (4.0.5)$$

---

A pesar de que las densidades lagrangianas en (4.0.1) y en (4.0.5) son diferentes debido al término  $-j^\mu \partial_\mu \Omega$ , tal diferencia no nos lleva a ningún cambio en las ecuaciones de campo. Esto se puede ver de la siguiente manera, consideremos la integral del elemento adicional que nos aparece en (4.0.5)

$$\int_V d^3 \mathbf{x} \int_{t_1}^{t_2} dt j^\mu \partial_\mu \Omega. \quad (4.0.6)$$

Nótese que éste se puede escribir como

$$\int_V d^3 \mathbf{x} \int_{t_1}^{t_2} dt \partial (j^\mu \Omega) - \int_V d^3 \mathbf{x} \int_{t_1}^{t_2} dt \partial_\mu j^\mu \Omega. \quad (4.0.7)$$

La segunda integral es cero debido a la ecuación de continuidad

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (4.0.8)$$

que la densidad de corriente obedece y la primera integral puede transformarse en una integral de superficie por el teorema de Gauss y es cero por las condiciones de frontera. Por tanto, debido a que la densidad lagrangiana (4.0.1) no tiene otros campos transformandos, sólo la corriente  $j^\mu$  que transforma trivialmente, el grupo asociado a la teoría electromagnética es  $U(1)$ .

Como ya hemos argumentado en esta tesis se desarrolla una nueva teoría unificada geométrica de gravedad y electromagnetismo donde el electromagnetismo no entra como parte del tensor métrico o del tensor de energía-momento de materia, ni tampoco debido a dimensiones adicionales, sino como parte de la conexión afín como originalmente intentó Weyl sin éxito. La diferencia enorme entre el intento de unificación de Weyl y el nuestro reside en la funcional de acción, ya que a diferencia de Weyl nosotros partiremos de una teoría escalar-tensorial de la gravedad y no de una teoría del tipo  $R^2$ . En la siguiente sección comenzaremos ya con el formalismo general de nuestra propuesta.

---

## 4.1. Formalismo

Partiremos considerando una funcional de acción para una teoría escalar-tensorial en vacío, en el frame de Jordan, dada por

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \Phi R + \frac{\tilde{\omega}(\Phi)}{\Phi} g^{\mu\nu} \Phi_{;\mu} \Phi_{;\nu} - \tilde{V}(\Phi) \right\} \quad (4.1.1)$$

donde  $R$  denota el escalar de Ricci,  $\tilde{\omega}(\Phi)$  es una función continua y diferenciable del campo escalar y  $\tilde{V}(\Phi)$  es un potencial escalar.

Como ya hemos venido mencionando a lo largo de la tesis, cada nueva teoría propuesta debe ser capaz de explicar lo que el resto de las teorías ya describen apropiadamente. Una manera de hacerlo es teniendo la teoría más aceptada, en este caso la teoría general de la relatividad, contenida en la misma. Tomando esto en cuenta, la funcional de acción (4.1.1) puede ser reescrita en términos del campo  $\varphi = -\ln(G\Phi)$  en la forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ e^{-\varphi} \left[ \frac{R}{16\pi G} + \omega(\varphi) g^{\mu\nu} \varphi_{;\mu} \varphi_{;\nu} \right] - V(\phi) \right\} \quad (4.1.2)$$

donde se han usado las relaciones  $\omega(\varphi) = (16\pi G)^{-1} \tilde{\omega}[\Phi(\varphi)]$  y  $V(\varphi) = \tilde{V}(\Phi(\varphi))$ .

Para conocer la dinámica de los campos en (4.1.2), es usual encontrar en la literatura además de la técnica variacional de Hilbert otro tipo de variación, conocida como variación a la Palatini, en la cual, tanto el tensor métrico como la conexión afín se consideran independientes una de la otra. Esto es importante porque en este tipo de variación no se impone una geometría de fondo fija, sino que la misma acción determina el tipo de geometría ideal para la teoría física que tal acción describa. Implementando este proceso, la variación respecto a la conexión afín nos lleva a la ecuación

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = \varphi_{,\alpha} g_{\mu\nu}. \quad (4.1.3)$$

Esta expresión ya es conocida en la literatura, y se le conoce como condición de no-metricidad para una geometría de Weyl-Integrable. Esto implica que la acción (4.1.2) debería describir una teoría escalar tensorial sobre una geometría de Weyl-Integrable y no sobre una geometría de Riemann, como se hace en la gran mayoría de artículos y libros sobre el tema encontrados en la literatura [17].

La condición en (4.1.3) resulta ser invariante bajo el grupo de transformaciones de Weyl

$$\bar{g}_{\mu\nu} = e^f g_{\mu\nu}, \quad (4.1.4)$$

$$\bar{\varphi}_\alpha = \varphi_\alpha + f, \quad (4.1.5)$$

donde  $f = f(x^\mu)$  es una función continua y diferenciable. Sin embargo, la funcional de acción en (4.1.2) no lo es, ya que aparecen términos adicionales. Esto se puede ver fácilmente si consideramos el término cinético

$$\varphi_{;\mu}\varphi_{;\nu} = \bar{\varphi}_{;\mu}\bar{\varphi}_{;\nu} - \bar{\varphi}_{;\mu}f_{;\nu} - \bar{\varphi}_{;\nu}f_{;\mu} + f_{;\mu}f_{;\nu}. \quad (4.1.6)$$

Con la finalidad de construir una acción invariante, introducimos la derivada covariante de norma

$$\varphi_{;\mu} = \left( {}^{(w)}\nabla_\mu + \gamma B_\mu \right) \varphi, \quad (4.1.7)$$

que nos permite tener  $\bar{\varphi}_{;\mu} = \varphi_{;\mu}$ . El término  $B_\mu$  es un campo vectorial interno, con esto nos referimos a que estamos dotando a cada punto de nuestra variedad con una estructura adicional. Y  $\gamma$  es una constante de acoplamiento introducida para tener unidades físicas correctas. Estamos trabajando en una teoría de norma, pero no de la manera usual como se conoce. Dadas las transformaciones de Weyl estamos hablando de que este campo  $B_\mu$  está siendo reescalado en cada frame  $(M, g, \varphi)$  generado por las transformaciones (4.1.4) y (4.1.5).

Proponemos la acción invariante bajo el grupo de Weyl para una teoría escalar-tensorial de la gravedad en la forma

$${}^{(w)}S = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\varphi} \left[ \frac{R}{16\pi G} + \omega(\varphi) g^{\mu\nu} \varphi_{;\mu} \varphi_{;\nu} - V(\varphi) e^{-\varphi} \right], \quad (4.1.8)$$

donde la invariancia bajo (4.1.4) y (4.1.5) requiere que el campo vectorial  $B_\mu$ , la función  $\omega(\varphi)$  y el potencial escalar  $V(\varphi)$  deben obedecer respectivamente las reglas de transformación

$$\bar{\varphi} \bar{B}_\mu = \varphi B_\mu - \gamma^{-1} f_{;\mu}, \quad (4.1.9)$$

$$\bar{\omega}(\bar{\varphi}) \equiv \omega(\bar{\varphi} - f) = \omega(\varphi), \quad (4.1.10)$$

$$\bar{V}(\bar{\varphi}) \equiv V(\bar{\varphi} - f) = V(\varphi). \quad (4.1.11)$$

---

Algo interesante a notar es que si expresamos la transformación (4.1.9) en términos del campo vectorial redefinido  $W_\alpha = \varphi B_\alpha$

$$\bar{W} = W_\mu - \gamma^{-1} f_{,\mu}. \quad (4.1.12)$$

e introducimos un término cinético en la funcional de acción (4.1.8) para que aparezcan contribuciones de  $W_\alpha$  en las ecuaciones dinámicas de los campos, encontramos que

$${}^{(w)}S = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\varphi} \left[ \frac{R}{16\pi G} + \omega(\varphi) g^{\mu\nu} \varphi_{;\mu} \varphi_{;\nu} - V(\varphi) e^{-\varphi} - \frac{1}{4} H_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta} e^{-\varphi} \right] \quad (4.1.13)$$

siendo  $H_{\alpha\beta} = W_{\beta,\alpha} - W_{\alpha,\beta}$  el campo de fuerza del campo de bosones de norma  $W_\mu$  donde además se puede mostrar que el término  $H_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta}$  es invariante bajo las transformaciones de Weyl. Términos de la forma  $\omega(\varphi) W^\mu W_\mu$  aparecen y por tanto el campo vectorial  $W^\mu$  puede interpretarse como un campo vectorial de bosones masivos solo para el caso  $\omega(\varphi) = cte$ .

## 4.2. Gravitoelectromagnetismo en el frame de Einstein-Riemann

Análogamente a lo mencionado en las secciones 1.4 y 1.3, en el análisis anterior las transformaciones de Weyl llevan de un frame  $(\mathcal{M}, g, \varphi, B_\mu)$  a otro, dentro de una misma clase de equivalencia. Sin embargo, bajo la elección  $f = -\varphi$  se obtiene el llamado frame de Riemann  $(\mathcal{M}, h = e^{-\varphi} g, 0, A_\mu = \bar{B}_\mu)$ . Recordemos que este frame sigue siendo un miembro de la clase de equivalencia de geometrías de Weyl-Integrable cuando las ecuaciones dinámicas se escriben en términos de la métrica  $g_{\alpha\beta}$ . Sin embargo, si en ese mismo frame se emplea la métrica efectiva  $h_{\alpha\beta} = e^{-\varphi} g_{\alpha\beta}$  la geometría efectiva es la de Riemann. Esto nos lleva a pensar que tendremos en tal frame una teoría de la relatividad general efectiva en donde aparecen un campo escalar y un campo vectorial, ambos de origen geométrico. Como veremos, la teoría efectiva resultante en el frame de Riemann será una nueva teoría de gravitoelectromagnetismo.

Para comenzar con el análisis, es fácil ver que la funcional de acción (4.1.13) en el frame de Einstein-Riemann adquiere la forma

$${}^{(R)}S = \int d^4x \sqrt{-h} \left[ \frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2} \omega(\phi) h^{\mu\nu} \mathcal{D}_\mu \phi \mathcal{D}_\nu \phi - V(\phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \quad (4.2.1)$$

donde  $\mathcal{D}_\mu = \nabla_\mu + \gamma A_\mu$ , el operador  $\nabla_\mu$  denota la derivada covariante de Riemann y  $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$ . Como ya mencionamos al inicio del capítulo, la transformación en (4.0.4)

$$\check{A}_\alpha = A_\alpha - \gamma^{-1} \sigma_{,\mu}, \quad (4.2.2)$$

está asociada con la transformación del potencial electromagnético, donde  $\sigma = \sigma(x^\alpha)$ . Para garantizar la invarianza de la acción (4.2.1) bajo (4.2.2) también se deben satisfacer las relaciones

$$\check{\phi} = \phi e^\sigma, \quad (4.2.3)$$

$$\check{\omega}(\check{\phi}) \equiv e^{-2\sigma} \omega(e^{-\sigma} \check{\phi}) = \omega(\phi), \quad (4.2.4)$$

$$\check{V}(\check{\phi}) \equiv V(e^{-\sigma} \check{\phi}) = V(\phi). \quad (4.2.5)$$

Más aún, es fácil probar que las ecuaciones de Maxwell también son invariantes no sólo bajo la transformación en (4.2.2) sino que también bajo el mismo conjunto de transformaciones de Weyl. Este hecho nos permite proponer que el campo  $A_\mu$  sea el campo electromagnético. Sin embargo, este solo sería un caso particular ya que  $A_\mu$  podría describir un campo de norma más general. De esta manera, es posible hacer la identificación de  $\gamma^{-1}$  con  $i \frac{e}{c}$ , siendo  $e$  la carga eléctrica y  $c$  la velocidad de la luz.

Así, considerando esta identificación del campo  $A_\mu$ , podemos extender la acción en (4.2.1) añadiendo un término de fuente para el campo electromagnético y el término de norma usual de Feymann

$${}^{(R)}S = \int d^4x \sqrt{-h} \left[ \frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2} \omega(\phi) h^{\mu\nu} \mathcal{D}_\mu \phi \mathcal{D}_\nu \phi - V(\phi) - \right. \quad (4.2.6)$$

$$\left. - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\nabla_\alpha A^\alpha)^2 - J^\alpha A_\alpha \right], \quad (4.2.7)$$

donde  $\bar{J}^\alpha = J^\alpha$  es la densidad de corriente conservada. El cual, a pesar de generar un término adicional en la acción

$$\bar{J}^\alpha \bar{A}_\alpha = J^\alpha (A_\alpha - \gamma^{-1} f_{;\alpha}) \quad (4.2.8)$$

este no realiza contribución alguna en las ecuaciones de campo debido a un procedimiento análogo al desarrollado en la introducción del presente capítulo.

Es importante notar que en nuestro formalismo se obtuvo la acción efectiva (4.2.7), que describe en términos generales una teoría de la relatividad general efectiva que se obtuvo de una teoría escalar-tensorial. Este hecho es un resultado novedoso de nuestro formalismo ya que en el caso de las teorías escalares-tensoriales usuales no se puede obtener relatividad general bajo ningún límite [14]. En otras palabras, el emplear una geometría de fondo no-Riemanniana en teorías escalares-tensoriales lleva a nuevos resultados.

Por otro lado, cálculos directos muestran que la acción (4.2.8) nos lleva a las ecuaciones de campo

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G \left[ \omega(\phi) \mathcal{D}_\mu \phi \mathcal{D}_\nu \phi - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} (\omega(\phi) h^{\alpha\beta} \mathcal{D}_\alpha \phi \mathcal{D}_\beta \phi - 2V(\phi)) - \tau_{\mu\nu}^{(em)} \right], \quad (4.2.9)$$

$$\begin{aligned} \omega(\phi) \square \phi + \frac{1}{2} \omega'(\phi) h^{\mu\nu} \mathcal{D}_\mu \phi \mathcal{D}_\nu \phi - \gamma \omega'(\phi) A^\mu \phi \mathcal{D}_\mu \phi + \gamma \omega(\phi) \nabla_\mu A^\mu - \\ - \gamma^2 \omega(\phi) A^\mu A_\mu \phi + V'(\phi) = 0, \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu - \gamma \omega(\phi) h^{\mu\nu} \phi \mathcal{D}_\mu \phi, \quad (4.2.11)$$

donde  $\square = h^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$  es el operador D'Alambertiano,  $\tau_{\mu\nu}^{(em)} = T_{\mu\nu}^{(em)} - h_{\mu\nu} J^\alpha A_\alpha$ , con  $T_{\mu\nu}^{(em)} = F_{\nu\beta} F_\mu^\beta - \frac{1}{4} h_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$  es el tensor energía-momento de un campo electromagnético libre que se calcula en términos de la métrica efectiva  $h_{\alpha\beta}$ . De esta manera, las ecuaciones de campo (4.2.9), (4.2.10) y (4.2.11) describen una teoría de gravitoelectromagnetismo en un espacio-tiempo cuya geometría efectiva es Riemanniana.

Con las ecuaciones de campo así obtenidas, ahora estamos en posición de estudiar soluciones cosmológicas a las mismas. Como un ejemplo particular propondremos un escenario de quinta esencia interactuante para explicar la presente expansión acelerada del universo.

### 4.3. Modelo de quinta esencia interactuante

Para implementar el principio cosmológico elegimos la norma  $\widetilde{A}_\mu = 0$ , que implica  $\widetilde{F}_{\mu\nu} = 0$ . En esta norma la acción transformada  $\widetilde{S}$  es

$${}^{(R)}\widetilde{S} = \int d^4x \sqrt{-h} \left[ \frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2} \widetilde{\omega}(\widetilde{\phi}) h^{\alpha\beta} \widetilde{\mathcal{D}}_\alpha \widetilde{\phi} \widetilde{\mathcal{D}}_\beta \widetilde{\phi} - \widetilde{V}(\widetilde{\phi}) \right], \quad (4.3.1)$$

que podemos escribir como

$${}^{(R)}\widetilde{S} = \int d^4x \sqrt{-h} \left[ \frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2} \hat{\omega}(Q) h^{\mu\nu} Q_{,\mu} Q_{,\nu} - \hat{V}(Q) \right], \quad (4.3.2)$$

donde hemos denotado por  $Q = \widetilde{\phi}$  al campo de quinta esencia,  $\hat{\omega}(Q) = \widetilde{\omega}(\widetilde{\phi})$  y  $\hat{V}(Q) = \widetilde{V}(\widetilde{\phi})$ . Las ecuaciones de campo para (4.3.2) están dadas por

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G \left[ \hat{\omega}(Q) Q_{,\mu} Q_{,\nu} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \left( \hat{\omega}(Q) h^{\alpha\beta} Q_{,\alpha} Q_{,\beta} - \hat{V}(Q) \right) \right], \quad (4.3.3)$$

$$\hat{\omega}(Q) \square Q + \frac{1}{2} \hat{\omega}'(Q) h^{\mu\nu} Q_{,\mu} Q_{,\nu} + \hat{V}'(Q) = 0. \quad (4.3.4)$$

Definiendo el tensor energía-momento no canónico

$$T_{\mu\nu}^{(eff)} = T_{\mu\nu} + \left[ \hat{\omega}(Q) Q_{,\mu} Q_{,\nu} - \frac{1}{2} \left( \hat{\omega}(Q) h^{\alpha\beta} Q_{,\alpha} Q_{,\beta} - \hat{V}(Q) \right) \right], \quad (4.3.5)$$

la ecuación de conservación  $\nabla_\mu T_{(eff)}^{\mu\nu} = 0$  se mantiene. Por otro lado, como de acuerdo a los datos observacionales el espacio es espacialmente plano, podemos considerar para nuestra descripción el elemento diferencial de línea de FRW

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (4.3.6)$$

donde  $a(t)$  es el factor de escala cósmico. Ahora, para construir el modelo de quinta esencia implementemos la transformación del campo

$$\zeta = \int \sqrt{\hat{\omega}(Q)} dQ \quad (4.3.7)$$

La expresión (4.3.7) transforma el término cinético no canónico en la funcional de acción (4.3.2) en un término canónico llevándonos a la funcional de acción

$${}^{(R)}\widetilde{S}(\zeta) = \int d^4x \sqrt{-h} \left[ \frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \zeta_{,\mu} \zeta_{,\nu} - V_{eff}(\zeta) \right] + S_m, \quad (4.3.8)$$

---

donde  $V_{eff}(\zeta) = \hat{V}(\zeta(Q))$  es el potencial efectivo redefinido.

Ahora, se sigue de (4.3.3), (4.3.4), (4.3.6) y (4.3.7) que las ecuaciones de campo independientes son

$$3H^2 = 8\pi G(\rho_\zeta + \rho_m), \quad (4.3.9)$$

$$\dot{\rho}_\zeta + \dot{\rho}_m + 3H(\rho_\zeta + \rho_m + p_\zeta) = 0, \quad (4.3.10)$$

donde  $\rho_m$  es la densidad de energía para la materia oscura, donde la presión y densidad de energía para la energía oscura están dadas por

$$p_\zeta = \frac{1}{2}\dot{\zeta}^2 - \dot{V}_{eff}(\zeta), \quad (4.3.11)$$

$$\rho_\zeta = \frac{1}{2}\dot{\zeta}^2 + V_{eff}(\zeta). \quad (4.3.12)$$

Si asumimos que la energía oscura no evoluciona de manera independiente de la energía oscura, la ecuación (4.3.10) nos lleva a

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = \eta(t), \quad (4.3.13)$$

$$\dot{\rho}_\zeta + 3H(\rho_\zeta + \rho_m + p_\zeta) = -\eta(r), \quad (4.3.14)$$

donde  $\eta(t)$  es una función de interacción. Esta interacción entre ambos sectores oscuros motiva la relación  $\rho_m(t) = \lambda(t)\rho_\zeta(t)$ , donde  $\lambda(t)$  es una función diferenciable que mide la variación del cociente entre la densidad de materia oscura y de energía oscura. Considerando un parámetro para la ecuación de estado para la energía oscura de quinta esencia  $\omega_\zeta = p_\zeta/\rho_\zeta$ , con ayuda de las ecuaciones (4.3.13) y (4.3.14) obtenemos

$$\dot{\rho}_\zeta + 3H \left( 1 + \frac{\omega_\zeta}{1 + \lambda} + \frac{\dot{\lambda}}{3H(1 + \lambda)} \right) \rho_\zeta = 0. \quad (4.3.15)$$

Resolviendo (4.3.15) llegamos a

$$\rho_\zeta = \rho_i e^{-3 \int_{t_i}^t \alpha(t') H(t') dt}, \quad (4.3.16)$$

donde  $\rho_i$  es una densidad de energía inicial y  $\alpha(t)$  es una función auxiliar definida por

$$\alpha(t) = 1 + \frac{\omega_\zeta}{1 + \lambda} + \frac{\dot{\lambda}}{3H(1 + \lambda)}. \quad (4.3.17)$$

---

Insertando (4.3.17) en (4.3.14) obtenemos la función de interacción

$$\eta(t) = \left( \frac{\dot{\lambda}}{1 + \lambda} - \frac{3H\lambda\omega_\zeta}{1 + \lambda} \right) \rho_\zeta. \quad (4.3.18)$$

Por otro lado, en términos de  $\lambda(t)$  la ecuación (4.3.9) puede ser reescrita en la forma

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(1 + \lambda)\rho_\zeta. \quad (4.3.19)$$

De esta manera,  $\lambda > 1$  corresponde a una época dominada por materia  $\rho_m > \rho_\zeta$ , cuando  $\lambda = 1$  tenemos una época igualitaria  $\rho_m = \rho_\zeta$  y  $\lambda < 1$  corresponde a una época dominada por energía oscura. De acuerdo a este argumento no es difícil de ver que  $\lambda(t)$  deber ser una función decreciente en el tiempo.

### A. Régimen dominado por energía oscura

En este régimen se satisface la condición  $\rho_\zeta \gg \rho_m$  o equivalentemente  $\lambda \ll 1$ . Si este es el caso la ecuación (4.3.19) se reduce a

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3}\rho_\zeta, \quad (4.3.20)$$

y la densidad de energía oscura (4.3.16) resulta

$$\rho_\zeta \simeq \rho_{de} \left( \frac{a}{a_{de}} \right)^{-3(1+\omega_\zeta)} e^{-(\lambda-\lambda_{de})}, \quad (4.3.21)$$

donde  $a_{de} = a(t_{de})$  y  $\lambda_{de} = \lambda(t_{de})$ , siendo  $t_{de}$  el tiempo en el cual comienza el régimen en el que la energía oscura domina. Sustituyendo (4.3.21) en la ecuación de Friedmann (4.3.20) e imponiendo  $a(t_{de}) = a_{de}$  se obtiene la solución

$$a(t) \simeq a_{de} \left[ 1 + \frac{3}{2}(1 + \omega_\zeta) \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_{de}} \int_{t_{de}}^t e^{-\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_{de})} dt \right]^{\frac{2}{3+(1+\omega_\zeta)}}. \quad (4.3.22)$$

Así, con el uso de (4.3.22) la fórmula (4.3.21) puede reescribirse como

$$\rho_\zeta \simeq \rho_{de} \left[ 1 + \frac{3}{2}(1 + \omega_\zeta) \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_{de}} \int_{t_{de}}^t e^{-\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_{de})} dt \right]^{-2} e^{-(\lambda-\lambda_{de})}. \quad (4.3.23)$$

Usando (4.3.11) y (4.3.12) llegamos a

$$V_{eff}(t) \simeq \frac{1}{2}(1 - \omega_\zeta)\rho_{de} \left[ 1 + \frac{3}{2}(1 + \omega_\zeta)\sqrt{\frac{8\pi G}{3}}\rho_{de} \int_{t_{de}}^t e^{-\frac{1}{2}(\lambda - \lambda_{de})} dt \right]^{-2} \times e^{-(\lambda - \lambda_{de})}, \quad (4.3.24)$$

$$\dot{V}_{eff}(t) \simeq -3(1 + \omega_\zeta)\rho_{de} \left[ 1 + \frac{3}{2}(1 + \omega_\zeta)\sqrt{\frac{8\pi G}{3}}\rho_{de} \int_{t_{de}}^t e^{-\frac{1}{2}(\lambda - \lambda_{de})} dt \right]^{-1} \times \sqrt{\frac{8\pi G}{3}}\rho_{de} e^{-(\lambda - \lambda_{de})} - \dot{\lambda}V_{eff}, \quad (4.3.25)$$

$$\zeta(t) \simeq \zeta_{de} + \sqrt{(1 + \omega_\zeta)\rho_{de}} \times \int_{t_{de}}^t \left[ 1 + \frac{3}{2}(1 + \omega_\zeta)\sqrt{\frac{8\pi G}{3}}\rho_{de} \int_{t_{de}}^t e^{-\frac{1}{2}(\lambda - \lambda_{de})} dt \right]^{-1} e^{-\frac{1}{2}(\lambda - \lambda_{de})} dt. \quad (4.3.26)$$

En el caso en que  $\lambda \rightarrow 0$  las ecuaciones de la (4.3.24) a la (4.3.26) resultan

$$V_{eff}(t) \simeq \frac{1}{2}(1 - \omega_\zeta)\rho_{de} \left[ 1 + \frac{3}{2}(1 + \omega_\zeta)\sqrt{\frac{8\pi G}{3}}\rho_{de} \int_{t_{de}}^t e^{-\frac{1}{2}(\lambda - \lambda_{de})} dt \right]^{-2} e^{\lambda_{de}}, \quad (4.3.27)$$

$$\dot{V}_{eff}(t) \simeq -3(1 + \omega_\zeta)V_{eff} \left[ 1 + \frac{3}{2}(1 + \omega_\zeta)\sqrt{\frac{8\pi G}{3}}\rho_{de} \int_{t_{de}}^t e^{-\frac{1}{2}(\lambda - \lambda_{de})} dt \right]^{-1} \times \sqrt{\frac{8\pi G}{3}}\rho_{de} e^{-\lambda_{de}} - \dot{\lambda}V_{eff}, \quad (4.3.28)$$

$$\zeta(t) \simeq \zeta_{de} + \sqrt{(1 + \omega_\zeta)\rho_{de}} \times \int_{t_{de}}^t \left[ 1 + \frac{3}{2}(1 + \omega_\zeta)\sqrt{\frac{8\pi G}{3}}\rho_{de} \int_{t_{de}}^t e^{-\frac{1}{2}(\lambda - \lambda_{de})} dt \right]^{-1} e^{-\frac{1}{2}(\lambda - \lambda_{de})} dt. \quad (4.3.29)$$

Manipulando algebraicamente (4.3.27), (4.3.28) y (4.3.29), y el hecho de que  $\dot{V}_{eff} = V'_{eff}\dot{\zeta}$  obtenemos el potencial de quinta esencia

$$V_{eff}(\zeta) \simeq V_{de} e^{\sqrt{24\pi G(1+\omega_\zeta)}e^{\lambda_{de}}(\zeta_{de}-\zeta)}. \quad (4.3.30)$$

Así se puede obtener un potencial exponencial para  $\zeta > \zeta_{de}$ , en este caso límite de época dominada por energía oscura. En términos del campo de quinta esencia original  $Q$  la ecuación (4.3.30) resulta

$$V_{eff} \simeq V_{de} e^{\sqrt{24\pi G(1+\omega_\zeta)}e^{\lambda_{de}}(Q_{de}-\int \sqrt{\hat{\omega}(Q)}dQ)}. \quad (4.3.31)$$

Entonces, encontramos que la forma exponencial para el potencial efectivo  $V_{eff}$  se puede mantener sólo para algunas formas de  $\hat{\omega}(Q)$ . Sin embargo, no es el caso en general.

## B. Régimen igualitario

En este régimen la condición a satisfacer es ahora  $\rho_\zeta = \rho_m$  o equivalentemente  $\lambda(t) = 1$ . Esto significa que hay una igualdad entre las densidades de energía de ambas componentes oscuras. En este caso la ecuación (4.3.19) resulta

$$H^2 = \frac{16\pi G}{3} \rho_\zeta. \quad (4.3.32)$$

La densidad de energía para el campo de quintaesencia (4.3.16) bajo esta aproximación resulta

$$\rho_\zeta \simeq \rho_{eq} \left( \frac{a}{a_{eq}} \right)^{-3(1+\frac{1}{2}\omega_\zeta)} e^{-\frac{1}{2}(1-\lambda_{eq})}, \quad (4.3.33)$$

donde  $a_{eq} = a(t_{eq})$  y  $\lambda_{eq} = \lambda(t_{eq})$ , siendo  $t_{eq}$  el tiempo en el que el régimen igualitario comienza. Sustituyendo (4.3.33) en la ecuación de Friedmann (4.3.32) e imponiendo  $a(t_{eq}) = a_{eq}$  la solución para el factor de escala puede ser escrito en la forma

$$a(t) \simeq a_{eq} \left[ 1 + \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \omega_\zeta \right) \sqrt{\frac{16\pi G}{3} \rho_{eq}} e^{-\frac{1}{4}(1-\lambda_{eq})(t-t_{eq})} \right]^{\frac{2}{3(1+\frac{1}{2}\omega_\zeta)}}. \quad (4.3.34)$$

Así, usando (4.3.34) la fórmula (4.3.33) puede escribirse como

$$\rho_\zeta \simeq \rho_{eq} \left[ 1 + \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \omega_\zeta \right) \sqrt{\frac{16\pi G}{3} \rho_{eq}} e^{-\frac{1}{4}(1-\lambda_{eq})(t-t_{eq})} \right]^{-2}. \quad (4.3.35)$$

Con el uso de (4.3.11) y (4.3.12) llegamos a

$$V_{eff}(t) \simeq \frac{1}{2} (1 - \omega_\zeta) \rho_{eq} e^{-\frac{1}{2}(1-\lambda_{eq})} \left[ 1 + \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \omega_\zeta \right) \sqrt{\frac{16\pi G}{3} \rho_{eq}} e^{-\frac{1}{4}(1-\lambda_{eq})(t-t_{eq})} \right]^{-2} e^{-(\lambda-\lambda_{eq})}. \quad (4.3.36)$$

$$\dot{V}_{eff}(t) \simeq -3 \left( 1 + \frac{1}{2} \omega_\zeta \right) \sqrt{\frac{16\pi G}{3} \rho_{eq}} e^{-\frac{1}{4}(1-\lambda_{eq})} V_{eff}(t) \left[ 1 + \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \omega_\zeta \right) \sqrt{\frac{16\pi G}{3} \rho_{eq}} e^{-\frac{1}{4}(1-\lambda_{eq})(t-t_{eq})} \right]^{-1} \quad (4.3.37)$$

$$\zeta(t) \simeq \frac{2}{3} \left( \frac{1 + \omega_\zeta}{1 + \frac{1}{2}\omega_\zeta} \right) \rho_{eq} \left( \frac{16\pi G \rho_{eq}}{3} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}(1-\lambda_{eq})} \left[ 1 + \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{1}{2}\omega_\zeta \right) \sqrt{\frac{16\pi G}{3}} \rho_{eq} e^{-\frac{1}{4}(1-\lambda_{eq})} (t - t_{eq}) \right]^{-1}. \quad (4.3.38)$$

Se sigue de (4.3.36), (4.3.37) y (4.3.38) que el potencial de quinta esencia escrito en términos de  $\zeta$  es dado por

$$V_{eff}(\zeta) \simeq V_{eq} e^{-3 \left( \frac{1 + \frac{1}{2}\omega_\zeta}{1 + \omega_\zeta} \right) \sqrt{\frac{16\pi G}{3}} (\zeta - \zeta_{eq})}. \quad (4.3.39)$$

Así para  $\zeta > \zeta_{eq}$  se puede obtener un potencial exponencial. En términos del campo de quinta esencia original  $Q$  la ecuación (4.3.39) adquiere la forma

$$V_{eff} \simeq V_{eq} e^{-3 \left( \frac{1 + \frac{1}{2}\omega_\zeta}{1 + \omega_\zeta} \right) \sqrt{\frac{16\pi G}{3}} (\int \hat{\omega}(Q) dQ - Q_{eq})}. \quad (4.3.40)$$

Se sigue de (4.3.40) que similarmente al régimen anterior el potencial efectivo depende de la la función  $\hat{\omega}(Q)$ .

### C. Régimen dominado por materia

En el caso cuando  $\rho_m \gg \rho_\zeta$  el componente de materia es dominante sobre la energía oscura. Bajo esta aproximación, es válido que  $\lambda \gg 1$  y de acuerdo a las ecuaciones (4.3.16) y (4.3.19) el factor de escala es dado por

$$a(t) \simeq \left[ a_{md}^{3/2} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{8\pi G \rho_{md}}{3}} (a_{md} \lambda_{md})^{1/2} (t - t_{md}) \right]^{2/3}, \quad (4.3.41)$$

donde  $t_{md}$  es el tiempo cuando la época dominada por materia comienza,  $a_{md} = a(t_{md})$ ,  $\rho_{md} = \rho(t_{md})$  y  $\lambda_{md} = \lambda(t_{md})$ . Así, de las ecuaciones (4.3.11), (4.3.12) y (4.3.16) obtenemos

$$\rho_\zeta \simeq \rho_{md} a_{md}^3 \left( \frac{\lambda_{md}}{\lambda} \right) \left[ a_{md}^{3/2} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{8\pi G \rho_{md}}{3}} (a_{md} \lambda_{md})^{1/2} (t - t_{md}) \right]^{-2}. \quad (4.3.42)$$

Entonces, el campo escalar  $\zeta$  resulta

$$\zeta \simeq \zeta_{md} + \sqrt{1 + \omega_\zeta} (\rho_{md} a_{md})^{1/2} \times \int_{t_{md}}^t \left( \frac{\lambda_{md}}{\lambda} \right)^{1/2} \left[ a_{md}^{3/2} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{8\pi G \rho_{md}}{3}} (a_{md} \lambda_{md})^{1/2} (t - t_{md}) \right]^{-1} dt. \quad (4.3.43)$$

Nótese que para  $\lambda \gg 1$  el campo escalar  $\zeta$  tiende a la constante  $\zeta \simeq \zeta_{md}$ , donde  $\zeta_{md} = \zeta(t = t_{md})$ . Para el potencial en este régimen obtenemos

$$V_{eff}(t) \simeq \frac{1}{2}(1 - \omega_\zeta)\rho_{md}a_{md}^3 \left(\frac{\lambda_{md}}{\lambda}\right) \times \left[ a_{md}^{3/2} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{8\pi G\rho_{md}}{3}} (a_{md}\lambda_{md})^{1/2}(t - t_{md}) \right]^{-2}. \quad (4.3.44)$$

Entonces el potencial en términos de  $\zeta$  resulta ser

$$V_{eff}(\zeta) \simeq V_{md} \exp \left[ -3\sqrt{\frac{8\pi G\rho_{md}}{3}} (a_{md}\lambda)^{1/2}(\zeta - \zeta_{md}) \right]. \quad (4.3.45)$$

Entonces, el potencial en términos del campo de quinta esencia  $Q$  resulta

$$V_{eff}(Q) \simeq V_{md} \exp \left[ -3\sqrt{\frac{8\pi G\rho_{md}}{3}} (a_{md}\lambda)^{1/2} \left( \int \sqrt{\hat{\omega}(Q)}dQ - Q_{md} \right) \right]. \quad (4.3.46)$$

Usando (4.3.46) la masa asociada a  $Q$  es dada por

$$m_{eff}^2(Q) \simeq 24\pi G V_{md}(\rho_{md}a_{md})\lambda \hat{\omega}(Q_{md}). \quad (4.3.47)$$

Como se esperaba, la masa del campo de quinta esencia también es función de  $\hat{\omega}(Q)$ . Esto significa que existe una clase de funciones  $\hat{\omega}(Q)$  que permiten un valor pequeño de  $m_{eff}$  cuando  $t \rightarrow t_{md}$ . Esto es importante para no tener conflicto con las predicciones de abundancia de elementos químicos durante la nucleosíntesis.

#### D. Caso atractor

En los modelos de quinta esencia interactuante existe un caso estacionario atractor caracterizado por un cociente constante entre ambas densidades de energía compatible con la presente expansión acelerada del universo [25, 26]. En nuestro caso esta solución se logra para  $\lambda = \lambda_0$  donde  $\lambda_0$  es constante. De acuerdo a PlanckTT + lowP + lensing + ext, se puede inferir que su valor va como  $\lambda_0 = 0,44092^{+0,00508}_{-0,005695}$  [27, 28]. En este caso la ecuación (4.3.17) resulta

$$\rho_\zeta = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3\alpha_0}, \quad (4.3.48)$$

donde  $\alpha_0 = 1 + \omega_\zeta / (1 + \lambda_0)$ ,  $\rho_0 = \rho(t = t_0)$ ,  $a_0 = a(t = t_0)$  siendo  $t_0$  el tiempo inicial cuando la época de expansión acelerada comienza. Insertando (4.3.48) en (4.3.19) obtenemos para el factor de escala

$$a(t) = a_0 \left[ \frac{3\alpha_0}{2} \sqrt{\frac{8\pi G}{3} (1 + \lambda_0) \rho_0 (t - t_0) + 1} \right]^{\frac{2}{3\alpha_0}}. \quad (4.3.49)$$

Así la ecuación (4.3.48) resulta

$$\rho_\zeta = \rho_0 \left[ 1 + \frac{3\alpha_0}{2} \sqrt{\frac{8\pi G}{3} (1 + \lambda_0) \rho_0 (t - t_0)} \right]^{-2}. \quad (4.3.50)$$

De esta forma, con la ayuda de (4.3.11) y (4.3.12), el campo escalar  $\zeta$  y su potencial resultan

$$\zeta(t) = \frac{2}{3\alpha_0} \sqrt{\frac{3}{8\pi G} \left( \frac{1 + \omega_\zeta}{1 + \lambda_0} \right)} \ln \left[ 1 + \frac{3\alpha_0}{2} \sqrt{\frac{8\pi G}{3} (1 + \lambda_0) \rho_0 (t - t_0)} \right]. \quad (4.3.51)$$

$$V_{eff}(t) = \frac{1}{2} (1 - \omega_\zeta) \rho_0 \left[ 1 + \frac{3\alpha_0}{2} \sqrt{\frac{8\pi G}{3} (1 + \lambda_0) \rho_0 (t - t_0)} \right]. \quad (4.3.52)$$

Utilizando (4.3.51) y (4.3.52), el potencial efectivo como una función de  $\zeta$  es dado por

$$V_{eff}(\zeta) = V_0 \exp \left[ -\alpha_0 \sqrt{24\pi G \left( \frac{1 + \lambda_0}{1 + \omega_\zeta} \right)} (\zeta - \zeta_0) \right]. \quad (4.3.53)$$

Este potencial como una función del campo de quinta esencia original  $Q$  resulta

$$V_{eff}(Q) = V_0 \exp \left[ -\alpha_0 \sqrt{24\pi G \left( \frac{1 + \lambda_0}{1 + \omega_Q} \right)} \left( \int \sqrt{\hat{\omega}(Q)} dQ - Q_0 \right) \right]. \quad (4.3.54)$$

Es importante resaltar que como ocurre en los casos anteriores, dependiendo de la forma de  $\hat{\omega}(Q)$  el potencial (4.3.54) no necesariamente obedece un comportamiento exponencial. Por ejemplo, si  $\int \sqrt{\hat{\omega}(Q)} dQ = \ln(\xi Q)^{1/\xi}$ , con  $\xi$  siendo una constante dimensional, que corresponde a  $\hat{\omega}(Q) = 1/(\xi Q)$ , el potencial efectivo obedece  $V_{eff}(Q) \simeq (\xi Q)^{-\beta/\xi}$ , donde el parámetro constante  $\beta = \alpha_0 \sqrt{24\pi G [(1 + \lambda_0)/(1 + \omega_\zeta)]}$ . Este es de hecho una diferencia respecto al modelo de Zimdahl y Pavon [25], debido a que el comportamiento exponencial del potencial de quinta esencia puede cambiar. La masa efectiva asociada al campo de quinta esencia  $Q$  derivada del potencial (4.3.54) resulta ser en nuestro caso

$$m_{eff}^2 = V_0 \alpha_0^2 24\pi G \left( \frac{1 + \lambda_0}{1 + \omega_Q} \right) \hat{\omega}(Q). \quad (4.3.55)$$

Un problema común en los modelos de quinta esencia es que la masa del campo de quinta esencia resulta ser muy alto en épocas tempranas del universo [25, 26]. Así en vista del acoplamiento de este campo con la materia, este valor grande de la masa implica que el cociente de bariones y fotones determinado con éxito durante la nucleosíntesis puede cambiar [26]. En nuestro modelo debido a la energía cinética no canónica del campo escalar de quinta esencia  $Q$ , tenemos un grado de libertad extra libre que puede resolver este problema. Si  $t_{now}$  denota el tiempo actual y  $t_{past}$  denota algún tiempo en el universo temprano, debido a la ecuación (4.3.55) obtenemos la relación

$$\frac{m_{eff}(t_{now})}{m_{eff}(t_{past})} = \frac{V(t_{past})}{V(t_{now})} \left( \frac{\alpha_{now}}{\alpha_{past}} \right) \sqrt{\frac{1 + \lambda_{now}}{1 + \lambda_{past}}} \frac{\hat{\omega}(Q_{now})}{\hat{\omega}(Q_{past})}, \quad (4.3.56)$$

donde  $\alpha_{past}$ ,  $\lambda_{past}$  y  $Q_{past}$  corresponden a los valores de  $\alpha$ ,  $\lambda$  y  $Q$  en  $t = t_{past}$ , mientras que  $\alpha_{now}$ ,  $\lambda_{now}$  y  $Q_{now}$  denotan los valores de  $\alpha$ ,  $\lambda$  y  $Q$  en  $t = t_{now}$ . Así, para tener un modelo de quinta esencia satisfactorio requerimos que  $m_{eff}(t_{now}) \simeq H_{now}$  y  $m_{eff}(t_{past}) = m_*$ , con  $m_*$  siendo lo suficientemente pequeña para evitar problemas con la nucleosíntesis. Así, la expresión (4.3.56) resulta

$$\frac{H_{now}}{m_*} = \frac{V(t_{past})}{V(t_{now})} \left( \frac{\alpha_{now}}{\alpha_{past}} \right) \sqrt{\frac{1 + \lambda_{now}}{1 + \lambda_{past}}} \frac{\hat{\omega}(Q_{now})}{\hat{\omega}(Q_{past})}. \quad (4.3.57)$$

Finalmente, la ecuación (4.3.55) puede ser escrita en términos de  $m_*$  como

$$m_{eff}^2 = m_*^2 \left( \frac{V_{now}}{V_{past}} \right) \left( \frac{\alpha_{now}}{\alpha_{past}} \right) \left( \frac{1 + \lambda_{now}}{1 + \lambda_{past}} \right) \frac{\hat{\omega}(Q_{now})}{\hat{\omega}(Q_{past})}. \quad (4.3.58)$$

Se sigue de (4.3.58) que para  $t = t_{past}$ , en particular en la época de la nucleosíntesis,  $m_{eff} = m_*$ , que es lo suficientemente pequeña para coincidir con los requerimientos de la nucleosíntesis. Más aún, claramente usando (4.3.57), la ecuación (4.3.58) para  $t = t_{now}$  se reduce a  $m_{eff}(t_{now}) \simeq H_{now}$ . Algo importante es que el valor tan pequeño de  $m_*$  se puede lograr considerando funciones apropiadas de  $\hat{\omega}(Q)$  functions. Finalmente, el parámetro de deceleración en este caso es dado por

$$q = \frac{1}{2} + \frac{3\omega_Q}{(1 + \lambda_0)}. \quad (4.3.59)$$

---

De acuerdo a los datos observacionales: Planck + WP + BAO + SN, la ecuación paramétrica de estado oscila en el intervalo de  $\omega_0 = -1,10_{-0,07}^{+0,08}$  [27, 28]. Así, para  $\lambda_0 = 0,44092$  el parámetro de deceleración (4.3.59) toma los valores  $-0,711 < q < -0,5557$ .

## 4.4. Escenario inflacionario

En esta sección implementaremos otra aplicación cosmológica a nuestro formalismo de gravitoelectromagnetismo. En esta ocasión propondremos un modelo inflacionario del universo temprano conocido como inflación tipo ley de potencias. Haremos un análisis del espectro de fluctuaciones primordiales del inflatón aunado a la parte electromagnética, ya que una de las características novedosas de nuestro formalismo es que permite la formación de estructuras incluyendo su parte electromagnética a partir de fluctuaciones gravitoelectromagnéticas. Pero veamos como se contruye el modelo.

Para desarrollar un escenario inflacionario de este formalismo consideremos una métrica espacialmente plana de FRW en la forma

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (4.4.1)$$

donde  $a(t)$  es el factor de escala cosmológico usual. El principio cosmológico nos permite asumir que el campo escalar del inflatón y el potencial electromagnético pueden ser escritos en la forma

$$\phi(x^\lambda) = \phi_c(t) + \delta\phi(x^\lambda), \quad A^\mu(x^\sigma) = \delta A^\mu(x^\sigma), \quad (4.4.2)$$

donde  $\phi_c(t) = \langle \phi(x^\lambda) \rangle$ ,  $\langle \delta\phi \rangle = \langle \delta\dot{\phi} \rangle = 0$  y  $\langle A^\mu(x^\sigma) \rangle = \langle \delta A^\mu(x^\sigma) \rangle = 0$ . Aquí  $\delta\phi$  denota las fluctuaciones cuánticas del campo escalar inflatón y  $\delta A_\alpha$  representa las fluctuaciones cuánticas del campo electromagnético. Entonces, se sigue de las ecuaciones (4.2.10), (4.2.11) y (4.4.1) que su parte clásica y cuánticas respectivamente, pueden ser escritas

como

$$\ddot{\phi}_c + 3(1 + \gamma)H\dot{\phi}_c + \frac{\omega'(\phi_c)}{2\omega(\phi_c)}\dot{\phi}_c^2 + \frac{V'(\phi_c)}{\omega(\phi_c)} = 0, \quad (4.4.3)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\delta\phi} + \left(3H + \frac{\omega'(\phi_c)}{\omega(\phi_c)}\dot{\phi}_c\right)\dot{\delta\phi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\delta\phi + \\ + \frac{1}{\omega(\phi_c)} \left[ V''(\phi_c) + \omega'(\phi_c)(\ddot{\phi}_c + 3H\dot{\phi}_c) + \frac{1}{2}\omega''(\phi_c)\dot{\phi}_c^2 \right] \delta\phi = 0. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

De igual manera para la ecuación (4.2.11) las fluctuaciones cuánticas electromagnéticas  $\delta A_\mu$  están determinadas por

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \delta F^{\mu\nu} + \lambda \nabla^\nu (\nabla_\mu \delta A^\mu) = \delta J^\nu - \\ - \gamma \omega(\phi_c) h^{\mu\nu} [\gamma \phi_c^2 \delta A_\mu + \phi_c \partial_\mu \delta\phi + (\partial_\mu \phi_c) \delta\phi] - \gamma \omega'(\phi_c) h^{\mu\nu} \phi_c \partial_\mu \phi_c \delta\phi. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

La parte clásica en (4.2.9) de acuerdo a (4.4.1) nos lleva a la ecuación de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[ \frac{1}{2}\omega(\phi_c)\dot{\phi}_c^2 + V(\phi_c) \right]. \quad (4.4.6)$$

Así, la parte clásica del campo inflatón es dada por las ecuaciones (4.4.3) y (4.4.6), donde sus fluctuaciones cuánticas están dadas por la expresión (4.4.4). Las fluctuaciones electromagnéticas están determinadas por (4.4.5), sin embargo es claro de esta ecuación que las fluctuaciones electromagnéticas  $\delta A_\mu$  dependen de las fluctuaciones del inflatón  $\delta\phi$ .

Ahora, siguiendo un procedimiento estándar de cuantización, la relación de conmutación para  $\delta\phi$  y su momento canónico conjugado  $\Pi_{(\delta\phi)}^0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta\phi}}$  están dados por

$$[\delta\phi(t, \bar{x}), \Pi_{(\delta\phi)}^0(t, \bar{x}')] = i\delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}'). \quad (4.4.7)$$

Así, usando que  $\Pi_{(\delta\phi)}^0 = \omega(\phi_c)\sqrt{-h}(\dot{\delta\phi} + \gamma A_0\delta\phi)$  el conmutador (4.4.7) resulta

$$\left[ \delta\phi(t, \bar{x}), \dot{\delta\phi}(t, \bar{x}') \right] = \frac{i}{\omega(\phi_c)\sqrt{-h}} \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}'). \quad (4.4.8)$$

En términos del campo auxiliar  $\delta\chi$  definido como

$$\delta\phi(t, \bar{x}) = \exp \left[ -\frac{3}{2} \int \left( H(t) + \frac{1}{3} \frac{\dot{\omega}(\phi_c)}{\omega(\phi_c)} \right) dt \right] \delta\chi(t, \bar{x}), \quad (4.4.9)$$

y considerando la expansión de Fourier

$$\delta\chi(t, \bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left[ a_k e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}} \xi_k(t) + a_k^\dagger e^{-i\bar{k}\cdot\bar{x}} \xi_k^*(t) \right], \quad (4.4.10)$$

donde el asterisco denota complejo conjugado,  $a_k$  y  $a_k^\dagger$  son los operadores de aniquilación y creación, los modos cuánticos  $\xi_k(t)$  de acuerdo a (4.4.4) están determinados por la ecuación

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_k + \left[ \frac{k^2}{a^2} - \frac{3}{2} \dot{H} - \frac{\omega''(\phi_c)}{\omega(\phi_c)} \dot{\phi}_c^2 - \frac{\omega'(\phi_c)}{\omega(\phi_c)} \ddot{\phi}_c + \left( \frac{\omega'(\phi_c)}{\omega(\phi_c)} \right)^2 \dot{\phi}_c^2 - \frac{1}{4} \left( 3H + \frac{\omega'(\phi_c)}{\omega(\phi_c)} \dot{\phi}_c \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{V''(\phi_c)}{\omega(\phi_c)} + \frac{\omega'(\phi_c)}{\omega(\phi_c)} (\ddot{\phi}_c + 3H\dot{\phi}_c) + \frac{1}{2} \frac{\omega''(\phi_c)}{\omega(\phi_c)} \dot{\phi}_c^2 \right] \xi_k = 0. \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

Los operadores de aniquilación y creación obedecen el álgebra

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = i\delta^{(3)}(\bar{k} - \bar{k}'), \quad [a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0. \quad (4.4.12)$$

De acuerdo a (4.4.8), (4.4.9) y (4.4.10) los modos deben satisfacer la condición de normalización

$$\dot{\xi}_k^* \xi_k - \xi_k^* \dot{\xi}_k = \frac{i}{\omega(\phi_c) \sqrt{-\hbar}} \exp \left[ 3 \int \left( H(t) + \frac{1}{3} \frac{\dot{\omega}(\phi_c)}{\omega(\phi_c)} \right) dt \right]. \quad (4.4.13)$$

Las fluctuaciones medias cuadráticas de  $\delta\phi$  en el sector IR (a gran escala) están dadas por

$$\langle \delta\phi^2 \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \exp \left[ -3 \int \left( H(t) + \frac{1}{3} \frac{\dot{\omega}(\phi_c)}{\omega(\phi_c)} \right) dt \right] \int_0^{\epsilon k_H} \frac{dk}{k} k^3 [\xi_k(t) \xi_k^*(t)]|_{IR}, \quad (4.4.14)$$

donde  $\epsilon = k_{max}^{IR}/k_p \ll 1$  es un parámetro adimensional donde  $k_{max}^{IR} = k_H(t_r)$  es el número de onda relacionado al radio de Hubble en el tiempo  $t_r$ , que es el tiempo en que los modos reingresan al horizonte y  $k_p$  es el número de onda de Planck. Para un parámetro de Hubble  $H = 0,5 \times 10^{-9} M_p$ , los valores de  $\epsilon$  oscilan entre  $10^{-5}$  y  $10^{-8}$ , y esto corresponde al número de desdoblamientos  $N_e = 63$  y el final de inflación.

Ahora, no es difícil mostrar que en la elección de norma de desacoplamiento

$$\nabla^\nu (\nabla_\mu \delta A^\mu) = \gamma \omega^2(\phi_c) \phi_c \nabla^\nu \delta\phi + (\gamma \omega^2(\phi_c) \partial^\nu \phi_c + \gamma \omega'(\phi_c) \phi_c \partial^\nu \phi_c) \delta\phi, \quad (4.4.15)$$

la ecuación (4.4.5) resulta

$$\square \delta A^\nu + \gamma^2 \omega(\phi_c) \phi_c^2 \delta A^\nu = 0. \quad (4.4.16)$$

Esta ecuación gobierna las fluctuaciones electromagnéticas durante inflación. En la métrica de FRW esta ecuación resulta

$$\delta \ddot{A}^\nu + 3H \delta \dot{A}^\nu - \frac{1}{a^2} \nabla^2 \delta A^\nu + \gamma^2 \omega(\phi_c) \phi_c^2 \delta A^\nu = 0. \quad (4.4.17)$$

En términos del campo auxiliar  $\delta \Gamma^\mu$  definido por

$$\delta A^\mu(\bar{x}, t) = \exp\left(-\frac{3}{2} \int H dt\right) \delta \Gamma^\mu(\bar{x}, t), \quad (4.4.18)$$

la ecuación (4.4.17) es

$$\delta \ddot{\Gamma}^\mu - \frac{1}{a^2} \nabla^2 \delta \Gamma^\mu + \left(-\frac{3}{2} \dot{H} - \frac{9}{4} H^2 + \gamma^2 \omega(\phi_c) \phi_c^2\right) \delta \Gamma^\mu = 0. \quad (4.4.19)$$

Ahora, siguiendo un proceso de cuantización covariante la relación de conmutador para  $\delta A^\mu$  y  $\bar{\Pi}^\mu = \frac{\partial L}{\partial(\delta A_{\mu,t})}$  es dado por

$$[\delta A_\mu(\bar{x}, t), \bar{\Pi}_\nu(\bar{x}', t)] = i h_{\mu\nu} \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}'), \quad (4.4.20)$$

$$[\delta A_\mu(\bar{x}, t), \delta A_\nu(\bar{x}', t)] = [\bar{\Pi}_\mu(\bar{x}, t), \bar{\Pi}_\nu(\bar{x}', t)] = 0. \quad (4.4.21)$$

Así,  $\bar{\Pi}^\mu = \sqrt{-h} [\delta F^{\mu 0} - h^{\mu 0} (\nabla_\sigma \delta A^\sigma)]$  de acuerdo a (4.2.7), entonces los conmutadores (4.4.20) y (4.4.21) implican que

$$\left[\delta \dot{A}^\mu(\bar{x}, t), \delta A^\nu(\bar{x}', t)\right] = \frac{i}{\sqrt{-h}} h^{\mu\nu} \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}'). \quad (4.4.22)$$

El campo auxiliar  $\delta \Gamma^\alpha$  puede ser expresado como una expansión de Fourier de la forma

$$\delta \Gamma^\mu(\bar{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \kappa \sum_{\alpha=0}^3 \epsilon_{(\alpha)}^\mu \left[ b_\kappa^{(\alpha)} e^{i\bar{\kappa} \cdot \bar{x}} \zeta_\kappa(t) + b_\kappa^{(\alpha)\dagger} e^{-i\bar{\kappa} \cdot \bar{x}} \zeta_\kappa^*(t) \right], \quad (4.4.23)$$

donde los operadores de creación y aniquilación  $b_\kappa^{(\alpha)\dagger}$  y  $b_\kappa^{(\alpha)}$ , respectivamente, obedecen el álgebra

$$\left[ b_\kappa^{(\alpha)}, b_{\kappa'}^{(\alpha')\dagger} \right] = -h^{\alpha\alpha'} \delta^{(3)}(\bar{\kappa} - \bar{\kappa}'), \quad \left[ b_\kappa^{(\alpha)}, b_{\kappa'}^{(\alpha')} \right] = \left[ b_\kappa^{(\alpha)\dagger}, b_{\kappa'}^{(\alpha')\dagger} \right] = 0, \quad (4.4.24)$$

y los cuadvectores de polarización  $\epsilon_{(\alpha)}^\mu$  satisfacen  $\epsilon_{(\alpha)} \cdot \epsilon_{(\alpha')} = h_{\alpha\alpha'}$ . Con la ayuda de (4.4.19) y (4.4.23) la dinámica de los modos es determinada por

$$\ddot{\zeta}_\kappa + \left( \frac{\kappa^2}{a^2} - \frac{3}{2}\dot{H} - \frac{9}{4}H^2 + \gamma^2\omega(\phi_c)\phi_c^2 \right) \zeta_\kappa = 0. \quad (4.4.25)$$

La expresión (4.4.18) en la ecuación (4.4.22) genera

$$\left[ \delta\Gamma^\mu(\bar{x}, t), \delta\Gamma^\nu(\bar{x}', t) \right] = \frac{i}{\sqrt{-h}} e^{3\int H dt} h^{\mu\nu} \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}'). \quad (4.4.26)$$

Por tanto los modos cuánticos  $\zeta_\kappa(t)$  deben obedecer

$$\dot{\zeta}_\kappa^* \zeta_\kappa - \zeta_\kappa^* \dot{\zeta}_\kappa = \frac{i}{\sqrt{-h}} e^{3\int H dt}. \quad (4.4.27)$$

Las fluctuaciones medias cuadráticas a escalas cosmológicas para el campo electromagnético  $\langle 0 | \delta A^\lambda \delta A_\lambda | 0 \rangle = \langle \delta A^2 \rangle$  están dadas por

$$\langle \delta A^2 \rangle_{IR} = \frac{e^{-3\int H dt}}{2\pi^2} \int_0^{\vartheta\kappa_H} \frac{d\kappa}{\kappa} \kappa^3 (\zeta_\kappa \zeta_\kappa^*)|_{IR}, \quad (4.4.28)$$

donde  $\vartheta = \frac{\kappa_{max}^{(IR)}}{\kappa} \ll 1$  es un parámetro adimensional. En esta fórmula  $\kappa_{max}^{(IR)} = \kappa_H(t_r)$  es el número de onda relacionado al radio de Hubble en el tiempo  $t_r$  que es el tiempo cuando los modos reingresan al horizonte.  $\kappa_p$  denota el número de onda de Planck. Ahora estamos en posición de probar el modelo considerando como ejemplo un potencial inflacionario particular.

### Ejemplo: Inflación tipo ley de potencias

En esta sección consideraremos a manera de ilustrar el formalismo un modelo de inflación tipo ley de potencias. Comencemos con la dinámica clásica del campo inflatón. Así, se sigue de las ecuaciones (4.4.3) y (4.4.6) que

$$\dot{\phi}_c = -\frac{1}{4\pi G(1+\gamma)} \frac{H'(\phi_c)}{\omega(\phi_c)}. \quad (4.4.29)$$

Entonces, insertando (4.4.29) in (4.4.6) obtenemos

$$V(\phi_c) = \frac{3H^2}{8\pi G} - \frac{1}{2(4\pi G)^2(1+\gamma)^2} \frac{H'^2}{\omega(\phi_c)}. \quad (4.4.30)$$

Resolviendo (4.4.29) para  $H(t) = p/t$  y  $\omega(t) = \omega_e(t/t_e)^q$  con  $\omega_e = \omega(t_e)$ , llegamos a

$$\phi_c(t) = \phi_e - \frac{1}{b}(t^{-q/2} - t_e^{-q/2}), \quad (4.4.31)$$

donde  $\phi_e = \phi(t_e)$  y  $b^2 = \frac{4}{q^2} \left( \frac{M_p^2}{4\pi(1+\gamma)} \frac{pt_e^q}{\omega_e} \right)$ . Así, con la ayuda de (4.4.30) y (4.4.31) el potencial escalar para la parte clásica del campo inflatón resulta ser

$$V(\phi_c) = \alpha_e p^2 (t_e^{-q/2} - b\phi_c)^{4/q}, \quad (4.4.32)$$

siendo  $\alpha_e = \frac{3M_p^2}{8\pi} - \frac{M_p^4 t_e^q b^2}{8\pi^2(1+\gamma)^2 \omega_e q^2}$ . La ecuación para los modos (4.4.11) es

$$\ddot{\xi}_k(t) + \left( \frac{k^2 t_e^{2p}}{a_e^2 t^{2p}} + \frac{\beta}{t^2} \right) \xi_k(t) = 0, \quad (4.4.33)$$

donde

$$\beta = \frac{3p}{2} - \frac{3q^2}{4} + \frac{q}{2} - \frac{qp^2}{4} - \frac{q^2 p}{6} - \frac{q^3}{36} + \frac{16\alpha_e p^2 b^2 t_e^q}{\omega_e q^2} - \frac{4\alpha_e p^2 b^2 t_e^q}{\omega_e q} + 3pq. \quad (4.4.34)$$

La solución general de (4.4.33) puede ser escrita en la forma

$$\xi_k(t) = A_1 \sqrt{t} \mathcal{H}_\nu^{(1)}[x(t)] + A_2 \sqrt{t} \mathcal{H}_\nu^{(2)}[x(t)], \quad (4.4.35)$$

siendo  $\nu = \frac{\sqrt{1-4\beta}}{2(1-p)}$  y  $x(t) = \frac{t_e^p}{a_e(p-1)} kt^{1-p}$ . Considerando un vacío de Bunch-Davies Vacuum y con la ayuda de (4.4.13) la solución normalizada es

$$\xi_k(t) = \sqrt{\frac{\pi}{4(p-1)}} \sqrt{\frac{1}{a_e \omega_e}} \sqrt{t} \mathcal{H}_\nu^{(1)}[x(t)]. \quad (4.4.36)$$

Entonces podemos usar en el sector IR  $\mathcal{H}_\nu^{(1)} \simeq \frac{i}{\pi} \Gamma(\nu) [x(t)/2]^{-\nu}$  en la ecuación (4.4.14) para obtener

$$\langle \delta\phi^2 \rangle = \frac{(-1)^{2\nu}}{2^{3-2\nu} \pi^3 (p-1)^{1-2\nu}} \frac{\Gamma^2(\nu)}{\omega_e a_e^{1-2\nu}} t_e^{1-2\nu p} t^{1-q+2(p-1)\nu} \left( \frac{a}{a_e} \right)^{-3} \int_0^{\epsilon k_H} \frac{dk}{k} k^{3-2\nu}. \quad (4.4.37)$$

Así, las fluctuaciones cuadráticas de  $\phi$  tienen un espectro de potencia  $\mathcal{P}_\phi(k)$  dado por

$$\mathcal{P}_\phi(k) \sim k^{3 - \frac{\sqrt{1-4\beta}}{2(p-1)}}, \quad (4.4.38)$$

con  $\beta$  dado por (4.4.34). El espectro (4.4.38) resulta casi invariante de escala para  $\beta \simeq -\frac{35}{4} - 9p^2 + 18p$ . El espectro de potencias para las fluctuaciones del campo inflatón corresponde al índice espectral

$$n_\phi = 4 - \frac{\sqrt{1-4\beta}}{2(p-1)}. \quad (4.4.39)$$

---

Se sigue de datos observacionales que  $n_\phi = 0,97 \pm 0,03$ . Esto corresponde a  $\beta = -0,875 - 9p^2 + 18p$  y  $\beta = -9,1136 - 9,3636p^2 + 18,7272p$ , respectivamente. El primer caso se logra cuando la ecuación algebraica

$$\begin{aligned} \frac{0,00694\omega_e^2\pi(1+\gamma)q^4}{p^3M_p^2t_e^{2q}(q-4)}(594p+27p^2-18q+9qp^2+ \\ +6q^2p+q^3-108pq-315-324p^2) = \frac{3M_p^2}{4\pi} - \frac{M_p^4t_e^{2q}p}{\pi^3(1+\gamma)^3\omega_e^2q^4}, \end{aligned} \quad (4.4.40)$$

se satisface. Esta es una ecuación de 4to grado que nos permite fijar  $\omega_e$ . En el segundo caso obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{0,000011\pi(1+\gamma)\omega_e^2q^4}{p^3M_p^2t_e^{2q}(4-q)}(-2,05 \cdot 10^5 - 2,1068 \cdot 10^5p^2 + 3,87 \cdot 10^5p + 16875q^2 - 11250q + \\ +5625qp^2 + 3750q^2p + 625q^3 - 67500pq) = \frac{3M_p^2}{4\pi} - \frac{M_p^4t_e^{2q}p}{\pi^3(1+\gamma^3)\omega_e^2q^4}, \end{aligned} \quad (4.4.41)$$

debe mantenerse para  $\omega_e$ .

---

## 4.5. Conclusiones

En el presente trabajo hemos desarrollado un formalismo que unifica gravedad y electromagnetismo geoméricamente en una sola teoría 4-dimensional gravitoelectromagnética. Partimos de una funcional de acción escalar-tensorial de la gravedad y mediante el proceso variacional conocido como Palatini encontramos que la geometría de fondo asociada con la teoría es del tipo Weyl-Integrable y no Riemanniana como se asume en este tipo de teorías [5]-[19]. En esta geometría la condición de no metricidad es invariante bajo el grupo de transformaciones de Weyl (4.1.4)-(4.1.5). Sin embargo, como se muestra en la sección 4.1 una teoría escalar tensorial de la gravedad no lo es. Así hemos propuesto una funcional de acción que lo sea, y al igual que como ocurre en teorías cuánticas de norma, hemos modificado la derivada covariante introduciendo un campo vectorial de norma interno  $B_\mu$ .

Como una extensión de los resultados mostrados en [20], obtuvimos que las transformaciones (4.1.4), (4.1.5) y (4.1.12) pueden interpretarse como un cambio de un marco de referencia  $(M, g, \varphi, B_\mu)$  a otro  $(M, \bar{g}, \bar{\varphi}, \bar{B}_\mu)$  dentro de la misma clase de equivalencia. Sin embargo encontramos que haciendo la elección  $f = -\varphi$  es posible obtener una geometría de Riemann efectiva introduciendo un tensor métrico efectivo  $h_{\alpha\beta} = e^{-\varphi} g_{\alpha\beta}$ . Llamamos frame de Einstein-Riemann al conjunto  $(M, h, A_\alpha)$  donde  $A_\alpha$  es el campo vectorial  $B_\alpha$  cuando implementamos la redefinición del tensor métrico  $h$ . es importante aclarar que a lo que nosotros nos referimos como frame de Einstein-Riemann es diferente al definido frame de Einstein usual en las teorías escalares-tensorial de la gravedad. En las teorías tradicionales el frame de Einstein es definido como un frame en el cual el campo escalar tiene un acoplamiento mínimo con la gravedad [24]. Más aún, en las teorías escalares tensoriales usuales el frame de Einstein se introduce por un mero procedimiento algebraico dado que la geometría de fondo en ambos frames (e frame de Jordan y el frame de Einstein) es la geometría Riemanniana (véase la sección 2.3 para una mejor explicación). Sin embargo, en nuestro modelo los frames son definidos por el tipo de geometría de fondo y

---

no por el acoplamiento del campo escalar.

Una característica interesante que encontramos es que el campo escalar de Weyl satisface simetrías distintas en los dos frames, y por ende el campo vectorial también debe satisfacer una transformación de campo de norma diferente en ambos frames. La transformación de simetría del campo vectorial en el frame de Einstein-Riemann dada por (4.2.2) abre la posibilidad de interpretar tal campo vectorial como el potencial electromagnético. Así, podemos interpretar las ecuaciones de campo obtenidas en el frame de Einstein-Riemann como correspondientes a una teoría de gravitoelectromagnetismo en la cual tanto el campo escalar como el potencial electromagnético tienen un origen geométrico.

En cuanto a aplicaciones cosmológicas, debido a que la acción invariante de Weyl exhibe un acoplamiento entre el campo escalar de Weyl y los campos de materia, se estudio la posibilidad de que el campo escalar juegue el papel de campo de energía oscura de quinta esencia en la presente época de expansión acelerada del universo. Concretamente, tal acoplamiento sugiere de manera natural que el sector de energía oscura debe tener interacción con el sector oscuro de materia. Es importante hacer notar que este acoplamiento entre energía oscura y materia oscura ha sido ya propuesto en la literatura en formalismos distintos al nuestro, sin embargo, en nuestro modelo podemos asociar a tal interacción en el sector oscuro un prigen geométrico. Siguiendo con esta idea investigamos la posibilidad de que el campo escalar de Weyl sea viable para la construcción de un modelo de quinta esencia interactuante para resolver el presente problema de expansión acelerada del universo. A diferencia de uno de los modelos de quinta esencia interactuante con más éxito, como lo es el de Zimdhal y Pavon, aquí tenemos un término cinético no canónico determinado por la función  $\hat{\omega}(\phi)$ . Hemos analizado tres regímenes dominantes: cuando la energía oscura domina, el regimen igualitario y un régimen dominado por materia, además del caso atractor que corresponde a un cociente constante entre materia oscura y la energía oscura. Encontramos que el potencial efectivo  $V_{eff}(Q)$  es dado en términos

---

de la función  $\hat{\omega}(Q)$ . Así, si  $\hat{\omega}(Q)$  es constante recobramos la típica forma exponencial obtenida en algunos modelos de quinta esencia interactuante [25, 26]. Sin embargo, si por ejemplo  $\hat{\omega}(Q) = 1/(\xi Q)$ , el potencial efectivo tiene la forma  $V_{eff}(Q) \simeq (\xi Q)^{-\beta/\xi}$  con  $\beta = \alpha_0 \sqrt{24\pi G [(1 + \lambda_0)/(1 + \omega_Q)]}$ . Un problema típico en los modelos de quinta esencia es que la masa del campo de quinta esencia resulta en valores muy grandes en épocas tempranas [25, 26]. Así debido al acoplamiento entre los sectores oscuros tal valor de la masa puede causar por ejemplo variaciones en el cociente de bariones y fotones, cambiando la abundancia de elementos ligeros durante la nucleosíntesis primordial [26]. Este problema puede evitarse en nuestro modelo debido a la función  $\hat{\omega}(Q)$ . De hecho, la masa del campo de quinta esencia  $Q$  durante la nucleosíntesis resulta ser lo suficientemente pequeña para coincidir con los requerimientos de la nucleosíntesis considerando una función apropiada  $\hat{\omega}(Q)$ . Más aún, la masa para  $Q$  actualmente es  $m_{eff}(t_{now}) \simeq H_{now}$ . Tomando en cuenta que observacionalmente la ecuación actual de parámetro de estado es determinada por  $\omega_0 = -1,10_{-0,07}^{+0,08}$  [27, 28], obtenemos que el parámetro de deceleración para el caso atractor oscila en el intervalo  $-0,711 < q < -0,5557$ .

En general, la teoría de gravitoelectromagnetismo obtenida con nuestro formalismo puede ser también el escenario para estudiar modelos inflacionarios del universo temprano. Más aún, pueden consierarse modelos de formación de estructura cósmica en los cuales las semillas de los campos magnéticos y de las estructuras cósmicas pueden evolucionar de manera unificada. En las últimas secciones propusimos un modelo de inflación tipo ley de potencias del universo temprano y obtuvimos los espectros tanto del campo inflatón como del campo electromagnético. Para ambos se obtuvieron las condiciones bajo las cuales se obtiene un espectro de Harrison-Zeldovich, que es un espectro cuasi-invariante de escala. Con esto podemos afirmar que el campo de Weyl en nuestro modelo es capaz de jugar el papel del campo inflatón al menos para una expansión tipo ley de potencias.

Finalmente, queremos hacer notar que con el formalismo desarrollado en la presente tesis doctoral se pueden estudiar muchos otros tópicos en el ámbito de la física moderna y

---

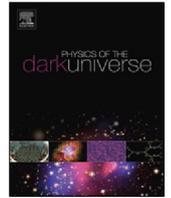
en particular en la cosmología moderna. Matemáticamente, los resultados obtenidos son una evidencia de la importancia del estudio de la geometría diferencial en las matemáticas aplicadas, pues modelos como el desarrollado aquí pueden tener alcance inclusive en la física de materiales.

# Bibliografía

- [1] J. Stewart, *Advanced general relativity*, Cambridge Monographs on mathematical physics.
- [2] R. A. Alemañ Berenger, *El desafío de Einstein Vol I. En busca de la unificación*, URSS Moscú. (2011)
- [3] H. Weyl, *Sitzungesber Deutsch. Akad. Wiss. Berli* 465 (1918).
- [4] H. Weyl, *Space, Time, Matter*, Dover, New York, 1952.
- [5] L. O’Raifeartaigh and N. Straumann, *Rev. Mod. Phys.* 72, 1 (2000).
- [6] M. Novello, L.A.R. Oliveira, J.M. Salim and E. Elbas. *Int. J. Mod. Phys. D* 1, 641 (1993).
- [7] J.M. Salim and S.L. Sautú, *Class. Quant. Grav.* 13, 353 (1996).
- [8] H.P. de Oliveira, J.M. Salim and S.L. Sautú, *Class. Quant. Grav.* 14, 2833 (1997).
- [9] C. Romero, J.B. Fonseca-Neto and M.L. Pucheu, *Class. Quant. Grav.* 29, 155015 (2012).
- [10] T.S. Almeida, M.L. Pucheu, C. Romero and J.B. Formiga, *Phys. Rev. D* 89, 6 (2014).
- [11] C. Romero, J.B. Fonseca-Neto and M.L. Pucheu, *Int. J. Mod. Phys. A* 26, 3721 (2011).

- 
- [12] R. Águila, J. E. Madriz-Aguilar, C. Moreno and M. Bellini, *Eur. Phys. J. C* **74**, 11 (2014).
- [13] C.H. Brans, R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **124** (1961) 925.
- [14] V. Faraoni, *Cosmology in Scalar-Tensor Gravity*, Kluwer Academic Publishers.
- [15] V. Faraoni, *Annals Phys.* **317** (2005) 366-382.
- [16] I. Quiros, R. Garcia-Salcedo, J.E. Madriz-Aguilar, T. Matos, *Gen. Rel. Grav.* **45** (2013) 289-518.
- [17] T. S. Almeida, M. L. Pucheu, C. Romero, J. B. Formiga, *Phys. Rev.* **D89** (2014) n<sub>o</sub>6, 064047.
- [18] M. L. Pucheu, T. S. Almeida, C. Romero, *Astrophysics Space Sci. Proc* **38** (2014) n<sub>o</sub>1, 33-41.
- [19] M. L. Pucheu, C. Romero, M. Bellini, J. E. Madriz-Aguilar, *Phys. Rev.* **D94** (2016) n<sub>o</sub>6, 064075.
- [20] T. S. Almeida, M. L. Pucheu, C. Romero and J. B. Formiga, *Phys. Rev.* **D89** (2014) n<sub>o</sub>6, 064047. ArXiv:gr-qc/1311.5459.
- [21] O. Gron, S. Hervik, *Einstein's General Theory of Relativity: With Modern Applications in Cosmology*, Springer (2007), ISBN-13: 978-0-387-69199-2.
- [22] D. Sapone, *Int. J. Mod. Phys. A* **25** (2010) 52 53 - 53 31.
- [23] A. D. Linde, *Phys. Lett.* **108B** (1982) 389-393.
- [24] T. P. Sotiriou, V. Faraoni, *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 081103. arXiv:1109.6324/gr-qc.
- [25] W. Zimdahl and D. Pavon, *Phys. Lett.* **B521** (2001) 133-138.

- 
- [26] L. P. Chimento, A. S. Jakubi, D. Pavon and W. Ximdahl, Phys. Rev. **D67** (2003) 083513. ArXiv:astro-ph/0303145.
- [27] Planck Collaboration, Astron. Astrophys. **594** (2016) A13.
- [28] C. Patrignani et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C, **40** (2016) 100001.



# Interacting quintessence from new formalism of gravitoelectromagnetism formulated on a geometrical scalar–tensor gauge theory of gravity

José Edgar Madriz Aguilar<sup>a,\*</sup>, M. Montes<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Departamento de Matemáticas, Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI), Universidad de Guadalajara (UdG), Av. Revolución 1500 S.R. 44430, Guadalajara, Jalisco, Mexico

<sup>b</sup> Centro Universitario de los Valles, Carretera Guadalajara-Ameca Km. 45.5, C.P. 46600, Ameca, Jalisco, Mexico

## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 15 December 2017

Received in revised form 29 May 2018

Accepted 29 May 2018

### Keywords:

Weyl-Integrable geometry

Gravitoelectromagnetism

Scalar–tensor gravity

Quintessence

Accelerated cosmic expansion

Dark energy

## ABSTRACT

We derive an interacting quintessence model on the framework of a recently introduced new class of geometrical scalar–tensor theories of gravity formulated on a Weyl-Integrable geometry, where the gravitational sector is described by both a scalar and a tensor metric field. By using a Palatini variational principle we construct a scalar–tensor action invariant under the Weyl symmetry group of the background geometry, which in the Einstein–Riemann frame leads to a gravitoelectromagnetic theory. We use the gauge freedom of the theory and the fact that the Weyl scalar field couples with matter fields to formulate an interacting quintessential model with a non-canonical kinetic term, where the quintessence field has a geometrical origin. Due to this non-canonicity we obtain that the mass of the quintessence field in the past epochs results to be small enough not to cause modifications in the baryon to photon ratio during nucleosynthesis.

© 2018 Published by Elsevier B.V.

## 1. Introduction

Since the supernovae type Ia observations in 1998, the idea that the universe is expanding in an accelerating manner has become one of the main open problems in modern cosmology [1–4]. Dark energy and modified gravity have been in general the proposals to explain the acceleration in the present epoch. As it is well-known the simplest model that fits the observational data is the  $\Lambda$ CDM model. However, it suffers from the cosmological constant and the coincidence problems. Moreover, there are some problems of the  $\Lambda$ CDM model at the level of phenomenology of galaxies, as for example the missing satellite problem, the cusp-core problem, and the too-big-too-fail problem [5–9]. Quintessence models have arisen as an attempt to alleviate the problems of the  $\Lambda$ CDM model. However, the main problem with many of these models is that so fine-tuning initial conditions are required in order to the mass of the quintessence field does not produce a variation in the baryon to photon ratio during nucleosynthesis, for example. The cosmic coincidence problem has been the motivation of a particular kind of quintessence models known as interacting quintessence models. In this approach the fact that the dark energy density today is

comparable with the present matter energy density has motivated the idea that dark energy may be coupled with dark matter. In fact, one of the problems in this kind of models is to find a physical motivation for such an interacting term. In the literature we can find several alternatives to address the present accelerated expansion issue. Among these proposals we can count  $k$ -essence models [10–13], dark fluid models [14–18], modified theories of gravity and Brane-World models [19–22], among many others. However, in this letter one of our interests is to investigate the present accelerated expansion issue in the context of non-Riemannian geometries. In particular on the class known as Weyl Integrable Geometry.

In view that general relativity does not incorporate the Mach's principle of inertia, the scalar–tensor theories of gravity were introduced as an attempt to include this principle in a gravitational theory [23,24]. However, one of the first problems was about the nature of the scalar field. For some researches it is not so clear if this scalar field plays the role of gravity or matter [25]. Another feature of this kind of theories is that there are two mathematical frames to make physical descriptions: the Jordan and the Einstein frames. Of course, a question that naturally emerges is about which of the both frames is the physical one. In the literature we can find authors that believe that the Jordan frame is the physical one and some others point that the Einstein frame is the physical one [25]. However, it is important to note that this controversy appears in scalar–tensor theories of gravity formulated on Riemannian

\* Corresponding author.

E-mail addresses: [jose.madriz@academicos.udg.mx](mailto:jose.madriz@academicos.udg.mx), [madriz@mdp.edu.ar](mailto:madriz@mdp.edu.ar) (J.E. Madriz Aguilar), [mariana.montes@academicos.udg.mx](mailto:mariana.montes@academicos.udg.mx) (M. Montes).