

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA.
CENTRO UNIVERSITARIO DE LOS VALLES.



GEOMETRÍA, ALEATORIA CUÁNTICA Y LA ECUACIÓN DE WHEELER-DEWITT

TESIS QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
DOCTOR EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS CON ORIENTACIÓN EN
MATEMÁTICAS

PRESENTA:

M.C. JOSÉ CARLOS ZAMARRIPA RODRÍGUEZ

DIRECTOR: DR. JOSÉ EDGAR MADRIZ AGUILAR

CODIRECTOR: DR. CARLOS A. ROMERO FILHO

AMECA, JAL. DICIEMBRE 2021



Ameca, Jalisco a 14 de enero de 2022

**Junta Académica del Programa
Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas
del Centro Universitario de los Valles**

Presente:

En mi carácter de director del trabajo recepcional titulado: ***Geometría aleatoria cuántica y la ecuación de Wheeler-Dewitt***, que presenta el **Mtro. José Carlos Zamarripa Rodríguez** con código **207603789**, expongo que lo he revisado y que a mi juicio cumple con los requisitos metodológicos y de contenido, para que pueda ser sometida al examen recepcional correspondiente al Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas con Orientación en Matemáticas.

Por lo antes expuesto, me permito emitir el presente oficio de liberación del trabajo recepcional, con la finalidad de que pueda llevarse a cabo la defensa del mismo.

**Atentamente
"PIENSA Y TRABAJA"**

Dr. José Edgar Madriz Aguilar
Profesor investigador
UdeG



UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
CENTRO UNIVERSITARIO DE LOS VALLES
DOCTORADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Oficio DCFM/114/2022

Mtro. Abraham Vega Tapia.
Coordinador Control Escolar
CUVALLES

At'n Raúl Antonio Verdín Arreola
Jefe de Unidad de Atención y Egreso

PRESENTE

Por este medio se hace de su conocimiento que el trabajo de tesis titulado "Geometría aleatoria cuántica y la ecuación de Wheeler-Dewitt", presentado por el (la) alumno (a) Mtro. José Carlos Zamarripa Rodríguez con código 207603789, para obtener el grado académico de Doctora en Ciencias Físico Matemáticas con orientación en Matemáticas SI CUMPLE con los requerimientos establecidos en el Reglamento General de Posgrado, para su presentación del examen de grado, según consta en el acta DCFM/001/2022 de sesión de la Junta Académica, celebrada el 14 de enero de 2022.

Por tal motivo, le informamos que el examen de grado se efectuará el día 28 de enero de 2022 a las 10:00 hrs en la sala de Juntas CRECE 2, ubicado en el edificio CRECE del CUValles. Al respecto le solicitamos atentamente la elaboración del acta correspondiente. Asimismo, le comunico sobre la designación del jurado de examen de grado.

Dr. Juan Antonio Licea Salazar (Presidente)
Dr. Alonso Castillo Ramírez (Secretario)
Dra. Mariana Sarahí Montes Navarro (Vocal)
Dr. Isidro Humberto Murive Lima (Vocal)
Dr. José Edgar Madriz Aguilar (Director) (Vocal)

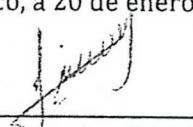
Le agradezco su atención y me pongo a sus órdenes para cualquier información adicional.

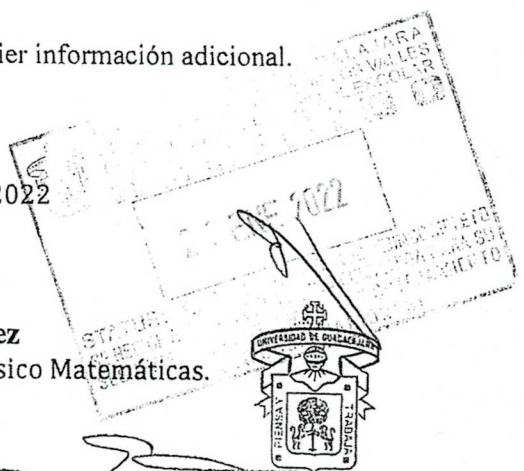



ATENTAMENTE
"PIENSA Y TRABAJA"

Ameca, Jalisco, a 20 de enero 2022

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
C. UNIVERSITARIO
DE LOS VALLES
Coordinadora del Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas


Dra. Irinea Yañez Sánchez
Coordinadora del Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas.




UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
C. UNIVERSITARIO
DE LOS VALLES
Vo.Bo. Dra. Myriam Guadalupe Colmenares López
Coordinadora de Posgrado

IYS/cmc*
c.c.p Expediente



Folio CUV/ DCFM/115/2022
ASUNTO: carta de revisión anti plagio
de trabajos recepcionales

**H. Miembros de la Junta Académica del
Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas**
Presente

Por este medio, me permito hacer de su conocimiento que el trabajo recepcional titulado **“Geometría aleatoria cuántica y la ecuación de Wheeler-Dewitt”**, realizado por el alumno **Mtro. José Carlos Zamarripa Rodríguez** con código **207603789** del Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas con orientación en Matemáticas, fue revisado de manera previa a su presentación y defensa ante el jurado correspondiente, a través de la herramienta anti-plagio denominada Turnitin.

Con base en la revisión realizada por el director del trabajo recepcional y el análisis del reporte de las similitudes encontradas por dicho software, no se identificaron elementos originales contenidos en alguna obra de terceros que se hagan pasar como propios por el autor del trabajo recepcional ¹.

Por ello, se considera que el trabajo recepcional presentado es resultado del esfuerzo individual de su autor y que este empleó las normas y protocolos de citación pertinentes en su desarrollo, por lo cual, se presume que no infringe derechos intelectuales de terceros.

Sin otro particular por el momento, me despido con un cordial saludo.

**ATENTAMENTE
“PIENSA Y TRABAJA”**

Ameca, Jalisco, a 20 de enero de 2022

Dra. Irínea Yañez Sánchez

Coordinadora del Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas



UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
C. UNIVERSITARIO
DE LOS VALLES
Coordinación de Doctorado
en Ciencias Físico Matemáticas

IYS/cmc*
c.c.p. Expediente

¹ Si bien el plagio como vulneración a los derechos intelectuales no se encuentra previsto en la legislación penal o en materia de propiedad intelectual, para efectos de su comprensión se recurre a la opinión doctrinista argentina Delia Lipszyc, quien señala se refiere al plagio como “el apoderamiento ideal de todos o de algunos elementos originales contenidos en la obra de otro autor presentándolo como propios”. (Ref. Lipszyc Delia, cit. pos. Timal López Sandra y Sánchez Espinoza, Francisco. El plagio en el contexto del derecho de autor. Revista “Tla-melaua” de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (online), 2017, vol. 11, n 42, pp 48-66. Disponible en http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S1870-69162017000200048&lng=es&nrm=iso

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi amigo y director de tesis el Dr. José Edgar Madriz Aguilar por estos 7 años en los que contribuyó de manera importante en mi formación académica, desde mi estancia en la licenciatura hasta el día en el que concluyo mis estudios de doctorado. También me gustaría darle las gracias por todos esos consejos de vida y por las tantas charlas dentro y fuera de universidades sobre ciencia y filosofía de la vida. Creo que la mejor manera de mostrarle mi gratitud es tomando las palabras de Newton. Si he logrado llegar a donde estoy “es porque estoy sobre hombros de gigantes”.

También quiero agradecer a mi codirector de tesis el Dr. Carlos Augusto Romero Filho, por sus ideas, las cuales fueron de gran ayuda durante el proceso de realización de esta tesis. Además, quiero agradecerle por todas las atenciones que ha tenido hacia mi persona y por el par de invitaciones que me hizo, para compartir con su grupo de investigación en Brasil algunos de los trabajos en los cuales he participado.

Quiero extender este agradecimiento a mi familia, a mis padres Juan y Maricela, a mi tía Elena y mi abuelo Guadalupe porque muy a su manera cada uno lograron inspirarme para continuar haciendo lo que me gusta. De manera especial quiero agradecer a Sandra, mi compañera de vida, por estar muy de cerca en este proceso de formación doctoral alentándome cada día para seguir trabajando.

Por último quiero agradecer a mis amigos: Caren, Cynthia, Edgar, Cache, Mago, Aide, Edmundo y Alonso, por sus palabras en diversos momen-

tos de mi vida, las cuales siempre me han ayudado a seguir adelante y en especial por se parte de esa familia que la vida me permitió escoger.

“Si un hombre comienza con certezas
terminará en dudas;
pero si se contenta con comenzar con dudas
terminará en certezas. ”

F.Bacon.

Índice general

Agradecimientos	I
Introducción	1
1. Geometría determinista	5
1.1. Variedades diferenciales	6
1.1.1. Curvatura	12
1.2. Geometría Riemanniana	13
1.3. Geometría no-Riemanniana	16
1.4. Geometría de Weyl	19
1.5. Geometría de Weyl-Integrable	21
2. Física cuántica	25
2.1. El principio de incertidumbre	26
2.2. Postulados de la mecánica cuántica	27
2.2.1. Postulado I	28
2.2.2. Postulado II	29
2.2.3. Postulado III	30
2.2.4. Postulado IV	33
2.3. Cuantización canónica de un campo escalar	35
2.4. La cuantización de Wheeler-DeWitt.	38
3. Geometría aleatoria cuántica relativista	41
3.1. Matrices aleatorias	41
3.2. Principio de incertidumbre geométrico relativista	46
3.3. La métrica aleatoria	47

3.4. Formalismo ADM en una geometría de Weyl Integrable . .	50
3.5. Ecuación de Wheeler-DeWitt para una teoría escalar-tensorial	57
3.6. Propuesta de cuantización para una geometría de Weyl-Integrable	63
4. Conclusiones	67
Bibliografía	71
Anexos	77

Introducción

En la actualidad, uno de los problemas abiertos en la física que es considerado uno de los más importantes del milenio es encontrar una teoría que describa la interacción gravitacional a escalas cuánticas, es decir a escalas inferiores a 10^{-33} cm, que es conocida como la longitud de Planck o escala de Planck. La teoría de la relatividad general describe la interacción gravitacional a escala clásica mientras que el mundo cuántico es descrito por la mecánica cuántica y la teoría de campos. Una característica de estas dos últimas teorías, que no es compartida por la relatividad general, es la descripción probabilística y estocástica de los fenómenos físicos que ocurren a esas pequeñas escalas.

Una implicación de la teoría cuántica es la teoría espectral de la materia. Esta teoría establece que por ejemplo, para un átomo de Hidrógeno, la energía del electrón que orbita al núcleo es descrita mediante un espectro discreto de estados de energía, donde la ecuación de Schrödinger determina la distribución de probabilidad para determinar la estructura de tal espectro [1]. Una característica fundamental del espectro es que cuenta con un estado base y el resto de los estados es descrito partiendo del mismo mediante un álgebra de operadores conocidos como operados de creación y aniquilación. Precisamente éste es uno de los motivos más importantes del porqué la gravedad no ha podido ser cuantizada de la misma manera que el resto de las interacciones fundamentales de la naturaleza, pues cuando se usa la teoría cuántica de campos con la intención de cuantizar la gravedad, se llega a una teoría cuántica que adolece de un único estado base y por tanto no existe un único espectro de estados de energía para una única interacción gravitacional. Este problema es conocido en la literatura

y se dice que la gravedad desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos es no renormalizable [2].

Uno de los primeros trabajos que dieron las bases de gravedad cuántica es el que desarrollaron Wheeler y DeWitt [3, 4, 5]. La idea de Wheeler y DeWitt fue considerar una teoría de gravitación, que en nuestro caso es descrita por una acción escalar tensorial, y la manera en que cuantizaron dicha teoría fue construyendo un operador hamiltoniano. Una vez obtenido este hamiltoniano procedieron a cuantizar su teoría de forma análoga como se hace con la ecuación de Schrödinger en mecánica cuántica. En este sentido es que a su teoría también se conoce como cuantización canónica de la gravedad.

Sin embargo, esta teoría tiene un problema que ha sido parcialmente solucionado. Sabemos de relatividad general que el tiempo es parte de la estructura que describe el universo como una variedad diferencial tipo espacio-tiempo. El problema radica, en que no existe una teoría capaz de cuantizar el tiempo y por tanto no tendría sentido hacer una cuantización del hamiltoniano de una acción descrita sobre una variedad espacio-tiempo. DeWitt solucionó este problema al considerar que el universo es modelado por una variedad diferenciable tipo espacio tiempo, es decir $\mathcal{M} \equiv \mathbb{R} \times \Sigma$, donde Σ representa una familia de hipersuperficies espaciales. Este procedimiento se conoce en la literatura como formalismo ADM en honor a sus creadores Arnowitt, Deser y Misner [6]. Esto fue una solución parcial, puesto que el formalismo ADM se construyó considerando que la geometría que describe al universo es la geometría de Riemann [7]. No obstante, se ha mostrado que cuando uno considera una teoría escalar tensorial de la gravedad, la geometría que mejor describe esta teoría no es la Riemanniana, sino la geometría de Weyl-Integrable [8, 9, 10]. Por tal motivo es necesario emplear una extensión del formalismo ADM en una geometría de Weyl-integrable.

En otro orden de ideas, a finales de los años 50's se realizaron un gran número de experimentos con núcleos pesados en el ámbito de la física nuclear. Estos átomos pesados absorbían y emitían miles de frecuencias de acuerdo a los espectros de absorción y emisión. Sin embargo, el problema era la dificultad para determinar los niveles de energía exactos partiendo

solo de los correspondientes números cuánticos asociados a dichos átomos. Técnicamente hablando este problema consiste en resolver el problema de valores propios para los hamiltonianos de sistemas integrados por cientos de nucleones. Los físicos Wigner y Dyson fueron los primeros en atacar este problema, y lo hicieron empleando métodos estadísticos. En lugar de tratar de obtener una solución aproximada al sistema nuclear cuántico de ecuaciones, se enfocaron en la distribución de los niveles de energía. La idea era describir estadísticamente las irregularidades que aparecían en los espectros de energía [11]. De esta manera, Wigner desarrolló una teoría que usaba matrices aleatorias para explicar la distribución de los niveles de energía que aparecían en los espectros [12, 13]. Wigner propuso la descripción de núcleos pesados mediante un ensamble de matrices aleatorias donde las entradas de las matrices eran elegidas de manera independiente mediante determinadas distribuciones de probabilidad.

Por otro lado, la teoría de matrices aleatorias es de gran utilidad en la descripción de fenómenos de naturaleza estocástica. Formalmente un proceso estocástico puede definirse como una colección de variables aleatorias ordenadas de acuerdo con una familia de índices, que en general suele identificarse con el tiempo. Así para cada instante de tiempo se tendría una variable aleatoria distinta, con lo que un proceso estocástico puede interpretarse como una sucesión de variables aleatorias cuyas características pueden variar con respecto al tiempo. A los posibles valores que pueden tomar las variables aleatorias se les suele llamar estados, los cuales pueden ser discretos o continuos.

Ahora bien, dado que la geometría juega un papel importante en los modelos gravitacionales como lo son la teoría de relatividad general o las teorías escalares tensorial en general, el presente trabajo de tesis tiene por objetivo construir una geometría que pueda ser cuantizada, teniendo como finalidad la obtención de un modelo de gravedad cuántica. Es por esto, que como un primer intento por obtener dicha geometría usaremos el formalismo de matrices aleatorias para resolver el problema de valores propios de un hamiltoniano asociado a un tensor métrico. Esto sabiendo que si bien el tensor métrico no es una matriz, sí tiene una representación matricial. Posteriormente, como una segunda alternativa usaremos una teoría de gravitación escalar tensorial, la cual cuantizaremos mediante la ecuación de

Wheeler-DeWitt. Esto teniendo en cuenta un formalismo ADM extendido a una geometría tipo Weyl-Integrable.

Capítulo 1

Geometría determinista

La geometría es una de las ramas más antiguas de la matemática, sus orígenes se remontan hasta Euclides cerca del año 300 a.c. Sin embargo, fue Riemann quien en 1854 da los fundamentos en su trabajo “*Ueber die Hypothesen, Welche der Geometrie zu Grunde liegen*” [14], de lo que hoy se conoce como geometría Riemanniana. La geometría de Riemann es solo uno de los muchos tipos de geometrías diferenciales que existen actualmente.

En el tiempo de Riemann, la física y la geometría eran ramas disjuntas, pero esto cambió en 1915, año en que Einstein postuló que la gravedad de un objeto en el espacio-tiempo se manifiesta como la curvatura de Ricci del espacio-tiempo. Esto estableció una relación directa entre la geometría y la física del universo.

Actualmente la mayoría de las teorías de gravitación aceptadas son formuladas en teorías geométricas. De ahí que para tener una buena comprensión de los modelos cosmológicos sea importante analizar en este capítulo algunos de los tipos de geometrías más comunes. Cabe mencionar que estos tipos de geometrías que veremos a continuación son deterministas, decimos esto en el sentido de que si tenemos una partícula de prueba dicha partícula seguiría una trayectoria definida por una curva la cual no tendría ningún aspecto probabilístico.

1.1. Variedades diferenciales

Comenzaremos este primer capítulo recordando algunos conceptos básicos sobre variedades diferenciales y algunos objetos geométricos que se pueden construir sobre una variedad diferencial. La primera definición que veremos es la de variedad topológica.

Definición 1.1.1. Una variedad topológica \mathcal{M} de dimensión n es un espacio topológico que satisface las siguientes propiedades [15]

- \mathcal{M} es hausdorff.
- Localmente euclídeo de dimensión n .
- Tiene una base contable de abiertos topológicos.

Definición 1.1.2. Una carta coordenada es un par (U, φ) con $U \in \tau \subset \mathcal{M}$ donde τ denota la topología de \mathcal{M} , y $\varphi : U \rightarrow V$ donde $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que φ es inyectiva.

Ahora, si φ es una función biyectiva, entonces φ es invertible y por tanto es posible que \mathcal{M} tenga una estructura diferenciable.

Definición 1.1.3. Se llama Atlas a una colección de cartas coordenadas

$$A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}, \quad (1.1)$$

donde α es un índice de un conjunto indexable Λ .

Definición 1.1.4. Decimos que las cartas coordenadas (U, φ) y (V, ψ) son C^∞ -compatibles si para $U \cap V \neq \emptyset$, las funciones de transición $\varphi \circ \psi^{-1}$ y $\psi \circ \varphi^{-1}$ son difeomorfismos.

Definición 1.1.5. Una estructura diferenciable sobre una variedad topológica \mathcal{M} , es una familia de $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de cartas coordenadas tal que

- El conjunto de $\{U_\alpha\}$ cubren a \mathcal{M} .
- Para cualquier α, β las cartas coordenadas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (U_β, φ_β) son C^∞ -compatibles.

- Cualquier carta coordenada (V, ψ) compatible con $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ es también un elemento de \mathcal{A} .

Definición 1.1.6. Una variedad diferenciable es una variedad topológica dotada con una estructura diferenciable donde las cartas coordenadas son C^∞ -compatibles.

La definición de una variedad diferenciable puede ilustrarse a través de la figura (1.1).

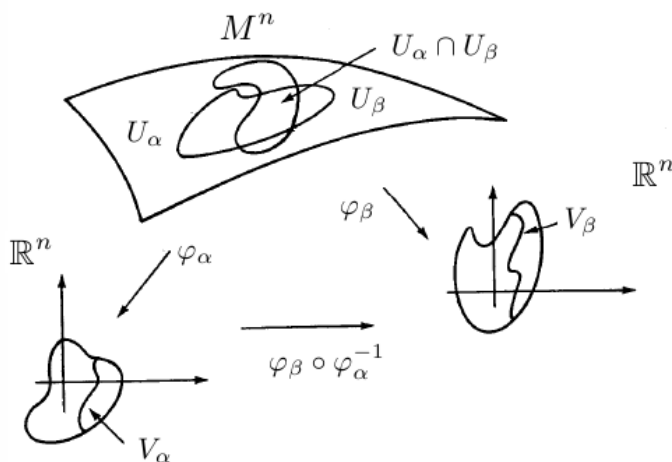


Figura 1.1: Variedad diferenciable.

Una vez establecida la definición de una variedad diferenciable, es posible construir sobre ella distintos objetos geométricos. Comencemos con la definición de curva.

Definición 1.1.7. Una curva sobre una variedad se define como un mapeo

$$\begin{aligned} \lambda : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{M}, \\ \tau &\mapsto \lambda(\tau) = p. \end{aligned}$$

donde I es un intervalo de \mathbb{R} y τ se conoce como parámetro de la curva λ . Si λ es una función de clase $C^k(I)$, se dice simplemente que la curva es diferenciable.

Definición 1.1.8. Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable. Se denota por $T_p(\mathcal{M})$ al espacio tangente en un punto $p \in \mathcal{M}$ y es definido por

$$T_p(\mathcal{M}) = \left\{ \bar{V}_p = \left. \frac{d}{d\tau} \right|_p \mid \bar{V}_p \text{ es tangente a } \lambda(\tau) \text{ en } p \right\}, \quad (1.2)$$

donde $\lambda(\tau)$ es una curva diferenciable sobre \mathcal{M} .

Dado que $T_p(\mathcal{M})$ es un espacio vectorial, si \mathcal{M} tiene una carta coordenada $\{x^\mu\}$ es posible escribir los elementos de la base de $T_p(\mathcal{M})$ en la forma $\{\partial/\partial x^\mu\}$, la cual por notación escribiremos simplemente como $\{\partial_\mu\}$.

Para cada punto $p \in \mathcal{M}$ existe un espacio tangente asociado. Con la unión de todos los espacios tangentes podemos definir otro espacio, a saber el fibrado tangente, que se denota por

$$T(\mathcal{M}) = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p(\mathcal{M}). \quad (1.3)$$

Además del espacio y fibrado tangente, se pueden construir sobre una variedad sus respectivos espacios duales.

Definición 1.1.9. Se llama espacio cotangente de $T_p(\mathcal{M})$ a su espacio dual definido como

$$T_p^*(\mathcal{M}) = \{ \tilde{\omega} : T_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R} \mid \tilde{\omega} \text{ es líneal} \}, \quad (1.4)$$

a los elementos $\tilde{\omega}$ de $T_p^*(\mathcal{M})$ se les llama 1-formas o covectores y satisfacen $\tilde{\omega}(\bar{V}) = \bar{V}(\tilde{\omega})$, es decir los vectores \bar{V} actúan sobre las 1-formas y viceversa.

De manera análoga a la ecuación (1.3) el fibrado cotangente se denota por

$$T^*(\mathcal{M}) = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p^*(\mathcal{M}). \quad (1.5)$$

Puede probarse que si la base coordenada de la variedad \mathcal{M} es $\{x^\mu\}$ entonces la base coordenada del espacio $T_p^*(\mathcal{M})$ se denota por $\{dx^\mu\}$.

El espacio tangente y cotangente son necesarios para poder introducir el siguiente objeto matemático, los tensores, que serán de gran utilidad en el desarrollo de esta tesis.

Definición 1.1.10. Un tensor es un mapeo multilíneal, de la forma

$$T : \underbrace{T_p^*(\mathcal{M}) \times \cdots \times T_p^*(\mathcal{M})}_{m \text{ veces}} \times \underbrace{T_p(\mathcal{M}) \times \cdots \times T_p(\mathcal{M})}_{n \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.6)$$

$$(\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_m, \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_n) \mapsto T(\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_m, \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_n) \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

En general podemos escribir un tensor T en una base coordenada en la forma

$$T = T_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_m} \partial_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\alpha_m} \otimes dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_n}, \quad (1.8)$$

donde \otimes denota el producto tensorial.

Si bien un tensor se compone tanto de la base como de sus componentes $T_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_m}$, en este trabajo haremos un abuso del lenguaje al referirnos por tensor solo a los componentes escalares del mismo. En geometría, la primera forma fundamental es dada por un tensor de gran importancia, a saber, el tensor métrico o simplemente métrica.

Definición 1.1.11. Definimos el producto interno o escalar en cada espacio tangente de la variedad como

$$\begin{aligned} g : T_p(\mathcal{M}) \times T_p(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (\bar{u}, \bar{v}) &\mapsto g(\bar{u}, \bar{v}). \end{aligned}$$

Es común encontrar en la literatura que a g se le llame tensor métrico, el cual satisface las siguientes propiedades:

- La métrica es simétrica

$$g(\bar{u}, \bar{v}) = g(\bar{v}, \bar{u}).$$

- La métrica es no degenerada

$$g(\bar{u}, \bar{v}) = 0, \quad \forall \bar{v} \in T_p(\mathcal{M}) \text{ si y solo si } \bar{u} = \bar{0}.$$

Si consideramos una base coordenada $\{\partial_\alpha\}$ y los vectores $\bar{u} = u^\alpha \partial_\alpha$ y $\bar{v} = v^\beta \partial_\beta$, donde hemos utilizado el convenio de suma de Einstein, la métrica toma la forma

$$g(\bar{u}, \bar{v}) = u^\alpha v^\beta g_{\alpha\beta}. \quad (1.9)$$

Un caso particular es cuando los vectores \bar{u} y \bar{v} son iguales, de este modo tenemos

$$g(\bar{u}, \bar{u}) = u^\alpha u_\alpha = \|u\|^2, \quad (1.10)$$

donde $\|u\|$ denota la norma del vector u .

Definición 1.1.12. Sea $\lambda : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ una curva diferenciable y $\bar{v} \in T_{\lambda(\tau)}(\mathcal{M})$. Se define la longitud de la curva λ por

$$s = \int_a^b \sqrt{g(\bar{v}, \bar{v})} d\tau. \quad (1.11)$$

No es difícil mostrar que en una carta coordenada podemos escribir la longitud o elemento de línea de la forma

$$s = \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}. \quad (1.12)$$

Se sigue de (1.12) que el elemento diferencial de línea tiene la forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.13)$$

Otra cantidad importante en una variedad diferenciable, es la conexión afín, definida de la siguiente manera.

Definición 1.1.13. Una conexión afín ∇ sobre una variedad \mathcal{M} es un mapeo

$$\begin{aligned} \nabla : T(\mathcal{M}) \times T(\mathcal{M}) &\rightarrow T(\mathcal{M}), \\ (\bar{u}, \bar{v}) &\mapsto \nabla_{\bar{u}} \bar{v}, \end{aligned}$$

que satisface las propiedades:

- $\nabla_{f\bar{u}+g\bar{v}} \bar{w} = f\nabla_{\bar{u}} \bar{w} + g\nabla_{\bar{v}} \bar{w}$.

- $\nabla_{\bar{u}}(\bar{v} + \bar{w}) = \nabla_{\bar{u}}\bar{v} + \nabla_{\bar{u}}\bar{w}$.
- $\nabla_{\bar{u}}(f\bar{v}) = \bar{u}(f)\bar{v} + f\nabla_{\bar{u}}\bar{v}$,

donde $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in T(\mathcal{M})$ y $f, g : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables.

Definición 1.1.14. Una conexión afín ∇ sobre una variedad \mathcal{M} , se dice simétrica si cumple con

$$\nabla_{\bar{u}}\bar{v} - \nabla_{\bar{v}}\bar{u} = [\bar{u}, \bar{v}], \quad (1.14)$$

para todo $\bar{u}, \bar{v} \in T(\mathcal{M})$, donde $[\bar{u}, \bar{v}]$ denota el conmutador de \bar{u} y \bar{v} .

Si consideramos una carta coordenada, el hecho de que ∇ sea simétrico implica

$$\nabla_{\partial_\mu}\partial_\nu - \nabla_{\partial_\nu}\partial_\mu = [\partial_\mu, \partial_\nu] = 0. \quad (1.15)$$

De la relación anterior se sigue que

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_\mu}\partial_\nu &= \nabla_{\partial_\nu}\partial_\mu, \\ \Gamma_{\mu\nu}^\sigma\partial_\sigma &= \Gamma_{\nu\mu}^\sigma\partial_\sigma, \end{aligned} \quad (1.16)$$

donde las cantidades $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ son conocidas como símbolos de conexión, los cuales en las siguientes sección mostraremos la forma explícita que tienen según el tipo de geometría.

Definición 1.1.15. Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable con una conexión afín ∇ . Entonces existe una única correspondencia que asocia un campo vectorial \bar{v} a lo largo de una curva diferenciable $\lambda(\tau) : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ con otro campo vectorial $D\bar{v}/d\tau$ a lo largo de $\lambda(\tau)$, llamada derivada covariante de \bar{v} a lo largo de λ definida por

$$\frac{D\bar{u}}{d\tau} = \nabla_{\frac{d}{d\tau}}\bar{v}. \quad (1.17)$$

En una carta coordenada la derivada covariante puede ser escrita en la forma

$$\frac{D\bar{v}}{d\tau} = \frac{dx^\beta}{d\tau} \left[v^\sigma{}_{,\beta} + v^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \right] \partial_\sigma \quad (1.18)$$

$$= \frac{dx^\beta}{d\tau} v^\sigma{}_{;\alpha} \partial_\sigma, \quad (1.19)$$

donde $v_{;\alpha}^{\sigma}$ denotan las componente de la derivada covariante.

El concepto de derivada covariante nos permite introducir la definición de transporte paralelo.

Definición 1.1.16. Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable con una conexión ∇ . Un campo vectorial \bar{v} a lo largo de una curva $\lambda : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ se dice paralelo cuando $D\bar{v}/d\tau = 0$ se cumple para todo $\tau \in (a, b)$.

Una diferencia entre variedad diferenciable y \mathbb{R}^n o también llamado espacio Euclídeo, es que en general las variedades diferenciables pueden tener curvatura. Si bien el concepto de curvatura es un tema en el cual se puede profundizar bastante, nosotros solo daremos las definiciones básicas.

1.1.1. Curvatura

Definición 1.1.17. La curvatura de Riemann de una variedad es una correspondencia que asocia a cada par de vectores $\bar{u}, \bar{v} \in T(\mathcal{M})$ un mapeo

$$\begin{aligned} R(\bar{u}, \bar{v}) : T(\mathcal{M}) &\rightarrow T(\mathcal{M}), \\ R(\bar{u}, \bar{v})\bar{w} &= \nabla_{\bar{v}}\nabla_{\bar{u}}\bar{w} - \nabla_{\bar{u}}\nabla_{\bar{v}}\bar{w} + \nabla_{[\bar{u}, \bar{v}]}\bar{w}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

donde $[\cdot, \cdot]$ denota el conmutador definido en (1.14).

En particular para una carta coordenada que contiene a un punto $p \in \mathcal{M}$, y para $\bar{u} = u^{\alpha}\partial_{\alpha}$, $\bar{v} = v^{\beta}\partial_{\beta}$ y $\bar{w} = w^{\mu}\partial_{\mu}$, en el caso de una conexión simétrica obtenemos que

$$R(\bar{u}, \bar{v})\bar{w} = R^{\nu}_{\alpha\beta\mu}u^{\alpha}v^{\beta}w^{\mu}\partial_{\nu}, \quad (1.21)$$

donde a las componentes coordenadas de $R(\bar{u}, \bar{v})\bar{w}$ denotadas por $R^{\nu}_{\alpha\beta\mu}$, se les conoce como las componentes coordenadas del tensor de Riemann o simplemente como tensor de Riemann, que en términos de los símbolos de conexión se escriben como

$$R^{\nu}_{\alpha\beta\mu} = \Gamma^{\sigma}_{\alpha\mu}\Gamma^{\nu}_{\beta\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}\Gamma^{\nu}_{\alpha\sigma} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\mu,\beta} - \Gamma^{\nu}_{\beta\mu,\alpha}, \quad (1.22)$$

donde $_{,\alpha}$ denota las derivadas parciales con respecto a x^{α} . Un caso particular del tensor de Riemann, es el tensor de Ricci.

Definición 1.1.18. Definimos el tensor de Ricci como una contracción del tensor de Riemann, es decir

$$R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\mu\beta} = g^{\mu\nu} R_{\nu\alpha\mu\beta}. \quad (1.23)$$

Por último, definimos la curvatura escalar de Ricci.

Definición 1.1.19. Definimos el escalar de curvatura de Ricci como la contracción del tensor de curvatura de Ricci, es decir

$$R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}. \quad (1.24)$$

Después de este breve repaso sobre variedades diferenciables y curvatura, a continuación hablaremos de algunos tipos geometrías comenzando por la geometría de Riemann.

1.2. Geometría Riemanniana

Como mencionamos en la introducción, este tipo de geometría toma su nombre del matemático Benhard Riemann, quien en una charla para la Universidad de Gotinga el 10 de Junio de 1854 [16], introdujo los conceptos de lo que hoy conocemos como geometría Riemanniana. Para comenzar a hablar de la Geometría de Riemann, primero definiremos una métrica Riemanniana.

Definición 1.2.1. Una métrica Riemanniana es aquella que además de satisfacer la definición (1.1.11) es positiva definida

$$g(\bar{u}, \bar{v}) \geq 0. \quad (1.25)$$

Definición 1.2.2 (Variedad Riemanniana). Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable dotada de una conexión afín ∇ y una métrica Riemanniana g . Decimos que \mathcal{M} es una variedad Riemanniana si la conexión afín es compatible con la métrica. Es decir, si para toda curva diferenciable $\lambda(\tau)$ y para cualquier par de campos vectoriales \bar{u}, \bar{v} definidos a lo largo de λ , tenemos $g(\bar{u}, \bar{v}) = \text{constante}$.

Podemos describir la definición (1.2.2) mediante la expresión

$$\frac{D}{d\tau}g(\bar{u}, \bar{v}) = 0, \quad (1.26)$$

donde (1.26) es conocida como condición de metricidad.

Una consecuencia inmediata de la condición de metricidad es que la longitud L de un vector transportado paralelamente no cambia, tal como mostramos a continuación

$$\begin{aligned} L^2 &= g(\bar{u}, \bar{u}) \\ 2L \frac{D}{d\tau}L &= \frac{D}{d\tau}g(\bar{u}, \bar{u}) \\ \frac{D}{d\tau}L &= 0, \end{aligned} \quad (1.27)$$

este modo tenemos que la longitud de un vector a lo largo de una curva, es la misma independientemente del punto en el cual se mida dicha longitud.

Si consideramos una carta coordenada, la condición de metricidad tiene la forma

$$\nabla_{\mu}g_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.28)$$

La ecuación (1.28) es la expresión más frecuentemente encontrada en la literatura para describir la geometría de Riemann. Sin embargo, cabe señalar que además de la condición de metricidad, la geometría de Riemann se caracteriza por no tener torsión, concepto que abordaremos en la siguiente sección. Por ahora continuamos con algunos resultados.

Proposición 1.2.3. *Sea \mathcal{M} sea una variedad Riemanniana. Una conexión ∇ es compatible con la métrica si y solo si para todo par \bar{u} y \bar{v} de campos vectoriales a lo largo de la curva diferenciable λ se tiene*

$$\frac{d}{d\tau}g\left(\bar{u}, \bar{v}\right) = g\left(\frac{D\bar{u}}{d\tau}, \bar{v}\right) + g\left(\bar{u} + \frac{D\bar{v}}{d\tau}\right). \quad (1.29)$$

Corolario 1.2.4. *Una conexión ∇ sobre una variedad Riemanniana \mathcal{M} es compatible con la métrica g si y solo si*

$$\bar{u}g(\bar{v}, \bar{w}) = g(\nabla_{\bar{u}}\bar{v}, \bar{w}) + g(\bar{v}, \nabla_{\bar{u}}\bar{w}). \quad (1.30)$$

La pruebas de la proposición (1.2.3) y del corolario (1.2.4) las omitiremos, sin embargo si se desean conocer se pueden consultar en ([17], pág. 53,54).

Como mostramos en la ecuación (1.18), la derivada covariante tiene una dependencia explícita de los símbolos de conexión. Estos últimos bajo ciertas condiciones muy especiales pueden determinarse de manera única. Este resultado es establecido en el siguiente teorema.

Teorema 1.2.5 (Levi-Civita). *Dada una variedad Riemanniana \mathcal{M} , existe una única conexión afín ∇ en \mathcal{M} que satisface*

1. ∇ es simétrica.

2. ∇ es compatible con la métrica Riemanniana g .

Demostración. La demostración se prueba por construcción, primero suponemos que ∇ existe, de este modo por compatibilidad con la métrica se tiene

$$\begin{aligned} \bar{u}g(\bar{v}, \bar{w}) + \bar{v}g(\bar{w}, \bar{u}) - \bar{w}g(\bar{u}, \bar{v}) &= g(\nabla_{\bar{u}}\bar{v}, \bar{w}) + g(\bar{v}, \nabla_{\bar{u}}\bar{w}) \\ &+ g(\nabla_{\bar{v}}\bar{w}, \bar{u}) + g(\bar{w}, \nabla_{\bar{v}}\bar{u}) \\ &- g(\nabla_{\bar{w}}\bar{u}, \bar{v}) - g(\bar{u}, \nabla_{\bar{w}}\bar{v}), \end{aligned} \quad (1.31)$$

usando el hecho que g y ∇ son simétricos obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{u}g(\bar{v}, \bar{w}) + \bar{v}g(\bar{w}, \bar{u}) - \bar{w}g(\bar{u}, \bar{v}) &= g([\bar{u}, \bar{v}], \bar{w}) + g([\bar{v}, \bar{w}], \bar{u}) + g([\bar{u}, \bar{w}], \bar{v}) \\ &+ 2g(\bar{w}, \nabla_{\bar{v}}\bar{u}). \end{aligned} \quad (1.32)$$

La ecuación (1.32) muestra que dados tres campos vectoriales $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ es posible obtener una única conexión y que dicha conexión esta determinada por la métrica g . Por lo tanto, la existencia y unicidad de la conexión quedan probadas. \square

Si consideramos una carta coordenada $\{x^\alpha\}$, y los vectores $\bar{u} = \partial_\alpha$, $\bar{v} = \partial_\beta$ y $\bar{w} = \partial_\lambda$ el teorema de Levi-Civita implica

$$\Gamma_{\alpha\beta\sigma}^\sigma = \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}), \quad (1.33)$$

el resultado de la ecuación (1.33) se sigue del hecho que en una base coordenada $[\partial_\alpha, \partial_\beta] = 0$. Además, dado que $g_{\alpha\beta}$ tiene inversa podemos reescribir (1.33) de la forma

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma = \frac{1}{2} \left(g_{\beta\gamma, \alpha} + g_{\alpha\gamma, \beta} - g_{\alpha\beta, \gamma} \right) g^{\sigma\gamma}, \quad (1.34)$$

la ecuación (1.34) es la ecuación más común para definir los símbolos de conexión en la geometría de Riemann. En la geometría de Riemann a los símbolos de conexión se les suele llamar como símbolos de Christoffel.

Como hemos visto lo que define a la geometría de Riemann puede ser resumido en dos condiciones: la condición de metricidad (1.28) y el hecho que los símbolos de conexión sean simétricos. Este último hecho esta vinculado con la torsión de la cual hablaremos en la siguiente sección.

1.3. Geometría no-Riemanniana

Al igual que ocurrió con el quinto postulado de Euclídes, hubo personas que pensaron que la condición de metricidad o la simetría de la conexión eran condiciones muy restrictivas y comenzaron a formular otros tipos de geometrías más generales, un ejemplo de ello fueron el matemático Elie Cartan o el físico Hermann Weyl. De este último mencionaremos en las siguientes secciones las geometrías que desarrolló.

Para comenzar a hablar de geometrías no Riemannianas es necesario introducir el concepto de torsión.

Definición 1.3.1. Sean $\bar{u}, \bar{v} \in T(\mathcal{M})$ definimos el tensor de torsión como el mapeo

$$\begin{aligned} T(\bar{u}, \bar{v}) : T(\mathcal{M}) &\rightarrow T(\mathcal{M}), \\ T(\bar{u}, \bar{v}) &\mapsto \nabla_{\bar{u}}\bar{v} - \nabla_{\bar{v}}\bar{u} - [\bar{u}, \bar{v}], \end{aligned} \quad (1.35)$$

donde $[\cdot, \cdot]$ es el conmutador de los vectores \bar{u}, \bar{v} .

En general si consideramos una base no coordenada $\{\bar{e}_\alpha\}$ el tensor de torsión tiene la forma

$$T_{\alpha\beta}^\sigma = (\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \Gamma_{\beta\alpha}^\sigma) \bar{e}_\sigma - C_{\alpha\beta}^\sigma \bar{e}_\sigma, \quad (1.36)$$

donde $T_{\alpha\beta}^\sigma$ son los componentes del tensor de torsión y $C_{\alpha\beta}^\sigma$ son los coeficientes de estructura o coeficientes del conmutador definidos como

$$C_{\alpha\beta}^\sigma \bar{e}_\sigma = [\bar{e}_\alpha, \bar{e}_\beta]. \quad (1.37)$$

Por otro lado, si consideramos una carta coordenada $\{x^\alpha\}$ y los vectores base $\bar{u} = \partial_\alpha$, $\bar{v} = \partial_\beta$ el tensor de torsión tiene la forma

$$T_{\alpha\beta}^\sigma \partial_\sigma = (\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \Gamma_{\beta\alpha}^\sigma) \partial_\sigma, \quad (1.38)$$

También es común escribir los componentes del tensor de torsión como la parte antisimétrica de los símbolos de conexión es decir

$$T_{\alpha\beta}^\sigma = 2\Gamma_{[\alpha\beta]}^\sigma, \quad (1.39)$$

como podemos notar (1.39) da razón de la antisimetría de los símbolos de conexión. Ahora bien de la definición del tensor de torsión podemos definir el tensor de contorsión.

Definición 1.3.2. Definimos el tensor de contorsión en términos del tensor de torsión como

$$K_{\alpha\beta}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (T_{\lambda\alpha\beta} + T_{\alpha\beta\lambda} - T_{\lambda\alpha\beta}), \quad (1.40)$$

donde hemos usado el hecho que $T_{\alpha\beta}^\sigma = g^{\sigma\lambda} T_{\lambda\alpha\beta}$. Cabe mencionar que los componente del tensor de torsión $T_{\lambda\alpha\beta}$ son antisimétricos respecto a sus dos últimos índices.

Como hemos mencionado una idea que llevo a la formulación de geometrías no Riemannianas, es el no considerar una conexión simétrica, es decir una geometría con torsión, sin embargo no es la única. La segunda idea nace al extender el concepto de compatibilidad de la conexión con la métrica.

Definición 1.3.3. Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable dotada con una conexión ∇ y una métrica $g_{\alpha\beta}$. Decimos que la métrica es compatible con la conexión si se cumple

$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = N_{\mu\alpha\beta}, \quad (1.41)$$

donde a $N_{\mu\alpha\beta}$ se le conoce como tensor de no metricidad.

En general a la ecuación (1.41) se le conoce como condición de no metricidad. Este nombre lo recibe debido a que en este tipo de geometría, el producto escalar entre dos vectores, en general no se conserva, sino que depende de la forma explícita que tenga el tensor de no metricidad.

Dado que hemos considerado una geometría con torsión y no metricidad, no esperaríamos que la conexión fuera la misma en una geometría Riemanniana que en una no Riemanniana.

Teorema 1.3.4. *Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable con una conexión afín con torsión y una relación de compatibilidad con la métrica dada por ecuación de no metricidad (1.41), entonces la conexión esta determinada por la expresión*

$$\Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha} = \{\mu\sigma\}^{\alpha} + K_{\mu\sigma}^{\alpha} + Q_{\mu\sigma}^{\alpha}, \quad (1.42)$$

donde $\{\alpha\beta\}^{\sigma}$ denota los símbolos de Christoffel determinados por (1.34), $K_{\alpha\beta}^{\sigma}$ es el tensor de contorsión y $Q_{\alpha\beta}^{\sigma}$ es el tensor auxiliar

$$Q_{\alpha\beta}^{\sigma} = \frac{g^{\sigma\lambda}}{2} \left(N_{\beta\lambda\alpha} - N_{\lambda\alpha\beta} - N_{\alpha\beta\lambda} \right). \quad (1.43)$$

Demostración. De la condición de no metricidad (1.41) y de la definición de derivada covariante se sigue

$$\begin{aligned} N_{\sigma\mu\nu} + N_{\mu\nu\sigma} - N_{\nu\sigma\mu} &= g_{\mu\nu,\sigma} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\sigma\mu,\nu} + \left(\Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} \right) g_{\lambda\mu} \\ &\quad + \left(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \right) g_{\lambda\sigma} - \left(\Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \right) g_{\lambda\nu} \\ &= g_{\mu\nu,\sigma} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\sigma\mu,\nu} + 2\Gamma_{[\sigma\nu]}^{\lambda} g_{\lambda\mu} + 2\Gamma_{[\mu\nu]}^{\lambda} g_{\sigma\lambda} \\ &\quad - 2\Gamma_{(\mu\sigma)}^{\lambda} g_{\lambda\nu}, \end{aligned} \quad (1.44)$$

donde $\Gamma_{(\mu\sigma)}^{\lambda}$ denota la parte simétrica de los símbolos de conexión. Dado cualquier tensor puede ser escrito como suma de su parte simétrica y antisimétrica es decir

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} = \Gamma_{(\alpha\beta)}^{\lambda} + \Gamma_{[\alpha\beta]}^{\lambda}, \quad (1.45)$$

al sustituir (1.45) en (1.44) podemos obtener

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} g_{\lambda\nu} &= N_{\nu\sigma\mu} - N_{\sigma\mu\nu} - N_{\mu\nu\sigma} + g_{\mu\nu,\sigma} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\sigma\mu,\nu} + T_{\nu\mu\sigma} \\ &\quad + T_{\mu\sigma\nu} - T_{\sigma\nu\mu}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

dado que $g_{\lambda\nu}$ admite una inversa, finalmente obtenemos la expresión

$$\Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha} = \{\alpha_{\mu\sigma}\} + K_{\mu\sigma}^{\alpha} + Q_{\mu\sigma}^{\alpha}. \quad (1.47)$$

□

Observemos que para el caso de una geometría no Riemanniana la conexión depende explícitamente de la torsión y de la no metricidad.

Existen muchos tipos de geometrías no Riemannianas, algunas de ellas tienen torsión y una condición de no metricidad como la geometría de Cartan. Otras consideran una condición de metricidad con torsión como lo es el caso de la geometría invariante de escala de Lyra y por último existen geometrías sin torsión con una condición de no metricidad como el caso de las geometrías propuestas por Hermann Weyl. De las cuales hablaremos a continuación.

1.4. Geometría de Weyl

Es bien sabido que Einstein formuló su teoría de relatividad general en la geometría de Riemann. Sin embargo, este formalismo describe únicamente la interacción gravitacional. En un intento por unificar la gravedad con electromagnetismo, Hermann Weyl en 1918 formuló un tipo de geometría no Riemanniana que lleva su nombre.

Weyl considero que la ecuación de compatibilidad Riemanniana era muy restrictiva, e introdujo un campo σ de 1-formas, el cual identificó con el cuadripotencial electromagnético. En esta teoría Weyl pudo obtener las ecuaciones de Maxwell [18]. Sin embargo, esta teoría no fue muy bien recibida, entre otras cosas por el problema del segundo reloj, del cual hablaremos en esta sección.

La manera en que Weyl incorporo el campo σ fue al considerar un tipo de no metricidad mediante la ecuación de compatibilidad

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = \sigma_{\alpha} g_{\mu\nu}, \quad (1.48)$$

donde σ_{α} denota los componentes del campo σ con respecto a una carta coordenada $\{x^{\alpha}\}$. Al haber hecho esta consideración, Weyl estaba dando

un origen geométrico al potencial del campo electromagnético, pues estaba dotando a una variedad \mathcal{M} con un campo de 1-forma. A este tipo de marco de referencia o frame lo llamaremos frame de Weyl y lo denotaremos por (\mathcal{M}, g, σ) .

Por otro lado, no es difícil ver que esta extensión de compatibilidad de la conexión con la métrica (1.48) es invariante bajo el grupo de transformaciones

$$\bar{g}_{\mu\nu} = e^f g_{\mu\nu}, \quad (1.49)$$

$$\bar{\sigma}_\alpha = \sigma_\alpha + f_{,\alpha}, \quad (1.50)$$

donde $f(x^\mu)$ es una función escalar diferenciable. En la literatura es común encontrar que a las transformaciones (1.49) y (1.50) se les mencione como grupo de Weyl. Cabe mencionar que el grupo de Weyl forma una clase de equivalencia con los distintos frame de Weyl $(\mathcal{M}, \bar{g}, \bar{\sigma})$.

Además, de la condición de no metricidad (1.48), otra característica de la geometría de Weyl es que en está la torsión es nula. Si tenemos presente estas dos condiciones en la ecuación que describe la conexión de una geometría no-Riemanniana (1.47), podemos obtener la conexión de Weyl

$$\Gamma_{\mu\alpha}^\lambda = \{\lambda_{\mu\alpha}\} - \frac{g^{\nu\lambda}}{2} \left(\sigma_\alpha g_{\mu\nu} + \sigma_\mu g_{\nu\alpha} - \sigma_\nu g_{\alpha\mu} \right), \quad (1.51)$$

donde $\{\lambda_{\mu\alpha}\}$ denota los símbolos de conexión de Christoffel. Es claro ver de la ecuación (1.51) que el campo de 1-formas forma parte de la estructura afín de la variedad. Más aún el campo de Weyl también esta reescalando el producto interior de los vectores, para mostrar esto usaremos la ecuación de compatibilidad de la conexión con la métrica.

Si ∇ es compatible con $g_{\alpha\beta}$ en el sentido Weyl, entonces para cualquier curva $\lambda(\tau)$ y cualesquiera dos vectores \bar{u}, \bar{v} se satisface

$$\frac{d}{d\tau} g(\bar{u}, \bar{v}) = \sigma \left(\frac{d}{d\tau} \right) g(\bar{u}, \bar{v}), \quad (1.52)$$

donde $d/d\tau$ denota el campo de vectores tangente a lo largo de λ y $\sigma(d/d\tau)$ indica la aplicación de la 1-forma σ a $d/d\tau$. Si integramos la ecuación (1.52) a lo largo de la curva λ desde un punto inicial $\lambda(\tau_0)$ a otro final $\lambda(\tau)$ llegamos a

$$g(\bar{u}(\tau), \bar{v}(\tau)) = g(\bar{u}(\tau_0), \bar{v}(\tau_0)) e^{\int_{\tau_0}^{\tau} \sigma(\frac{d}{d\rho}) d\rho}. \quad (1.53)$$

Esta ecuación implica que el producto de dos campos vectoriales \bar{u} y \bar{v} a lo largo de la curva λ en la geometría de Weyl no es constante. De hecho aparece un reescalamiento por un factor que depende del campo de 1-formas σ . Además, la ecuación (1.53) tiene implicaciones sobre la norma de un vector cuando es transportado paralelamente, pues no preserva su longitud. Para el caso de una curva cerrada $\lambda : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$, es decir $\lambda(b) = \lambda(a)$, se sigue de (1.53) que

$$g(\bar{u}(b), \bar{u}(b)) = g(\bar{u}(a), \bar{u}(a)) e^{\oint \sigma(\frac{d}{d\rho}) d\rho}. \quad (1.54)$$

La principal implicación de la ecuación (1.54) es que la norma de un vector \bar{u} no es la misma a pesar de ser medida en un mismo punto sobre la variedad \mathcal{M} . Más aún, si suponemos que \bar{u} es un vector tipo tiempo entonces tendríamos distintas unidades de tiempo sobre un mismo punto de la variedad \mathcal{M} asociados a la curva λ . En la literatura a este problema se le conoce como el problema del segundo reloj y fue Einstein el primero en percatarse del mismo. Este fue el motivo por el cual la geometría de Weyl no tuvo el impacto esperado en la física como teoría unificación de la gravedad y el electromagnetismo.

Por otro lado fue el mismo Weyl quién propuso una solución al problema del segundo reloj, mediante la reformulación de su geometría en una nueva que se conoce como geometría de Weyl-Integrable, de la cual hablaremos a continuación.

1.5. Geometría de Weyl-Integrable

La geometría de Weyl-Integrable nace como una solución al problema que planteó Einstein del segundo reloj. Básicamente Weyl propuso que el campo de 1-formas debía expresarse como el gradiente de un campo

escalar $\sigma = \phi_{,\alpha}$. De esta manera, la condición de no-metricidad de Weyl se transforma en

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = \phi_{,\alpha} g_{\mu\nu}, \quad (1.55)$$

la cual se conoce como condición de no-metricidad de Weyl-Integrable. En este caso, al considerar la ecuación (1.55) los símbolos de conexión toman la forma

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda} = \{\lambda_{\mu\alpha}\} - \frac{g^{\nu\lambda}}{2} \left(\phi_{,\alpha} g_{\mu\nu} + \phi_{,\mu} g_{\nu\alpha} - \phi_{,\nu} g_{\alpha\mu} \right), \quad (1.56)$$

donde $\{\lambda_{\mu\alpha}\}$ denotan los símbolos de Christoffel.

Ahora, como ya hemos mencionado, el problema del segundo reloj es una implicación directa de la ecuación

$$g(\bar{u}(b), \bar{v}(b)) = g(\bar{u}(a), \bar{v}(a)) e^{\oint \bar{\sigma} \left(\frac{d}{d\rho} \right) d\rho}. \quad (1.57)$$

En otras palabras, la idea de Weyl era anular el argumento de la exponencial para eliminar el problema del segundo reloj. De ahí que su propuesta fue tomar $\sigma_{\alpha} = \phi_{,\alpha}$. Así, el teorema de Stokes implica

$$\oint \sigma \left(\frac{d}{d\rho} \right) d\rho = 0, \quad (1.58)$$

para cualquier integral de camino cerrada, que es justamente el resultado deseado por Weyl. Por tanto, sustitución directa de la ecuación (1.58) en (1.57) genera

$$g(\bar{u}(b), \bar{v}(b)) = g(\bar{u}(a), \bar{v}(a)). \quad (1.59)$$

De esta manera el producto interior entre dos vectores cualesquiera en un mismo punto $p \in \mathcal{M}$ es el mismo, y ya no existe el problema del segundo reloj. Sin embargo, cabe mencionar que el producto interior entre dos vectores a lo largo de una curva no-cerrada si puede variar, y es solo bajo trayectorias cerradas y en un mismo punto que el producto interior g no cambia.

Por otro lado, una propiedad importante de la geometría de Weyl-Integrable es que su condición de no-metricidad resulta ser invariante bajo el grupo de transformaciones

$$\bar{g}_{\mu\nu} = e^f g_{\mu\nu}, \quad (1.60)$$

$$\bar{\phi} = \phi + f, \quad (1.61)$$

donde $f(x^\gamma)$ es una función escalar diferenciable definida sobre la variedad \mathcal{M} . Al igual que en el caso de la geometría de Weyl, las transformaciones (1.60) y (1.61) forman una clase de equivalencia para el frame de Weyl $(\mathcal{M}, \bar{g}, \bar{\phi})$. Es decir uno puede pasar de una variedad $(\mathcal{M}, \bar{g}, \bar{\phi})$ a otra variedad (\mathcal{M}, g, ϕ) donde ambas son equivalentes. En particular si consideramos el caso cuando $f = -\phi$ se sigue

$$\bar{g}_{\mu\nu} = e^{-\phi} g_{\mu\nu}, \quad (1.62)$$

$$\bar{\phi} = 0. \quad (1.63)$$

Ahora, si además hacemos una redefinición de la métrica mediante la transformación conforme

$$h_{\mu\nu} = e^{-\phi} g_{\mu\nu}, \quad (1.64)$$

la ecuación (1.64) tiene una implicación directa al sustituir en la condición de no metricidad de Weyl-Integrable

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \left(e^\phi h_{\mu\nu} \right) &= \phi_{,\alpha} e^\phi h_{\mu\nu}, \\ e^\phi \phi_{,\alpha} h_{\mu\nu} + e^\phi \nabla_\alpha h_{\mu\nu} &= \phi_{,\alpha} e^\phi h_{\mu\nu}, \\ \nabla_\alpha h_{\mu\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (1.65)$$

es decir una condición de metricidad. Esto nos dice que tenemos dos variedades diferenciables (\mathcal{M}, g, ϕ) y $(\mathcal{M}, h, 0)$ equivalentes, donde en ambas la geometría que las describe es la geometría de Weyl-Integrable. Sin embargo, con la métrica $h_{\alpha\beta}$ es posible describir esa geometría de Weyl-Integrable como una geometría de Riemann efectiva. Debido a esta característica es que hemos llamado a $(\mathcal{M}, h, 0)$ como el frame de Einstein-Riemann. Este resultado es de gran importancia y será utilizado más adelante.

Una vez que hemos hablado de los conceptos básicos que definen y caracterizan a distintos tipos de geometrías diferenciales, el siguiente paso para poder construir una geometría aleatoria, o dicho en otras palabras, una geometría cuantizable, es importante hablar de la teoría de mecánica cuántica lo que será nuestro objetivo en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Física cuántica

La mecánica cuántica nace a principios del siglo XX como una necesidad para poder explicar fenómenos como la radiación de cuerpo negro o el efecto fotoeléctrico entre otros, los cuales la mecánica clásica no podía explicar. Es bien sabido que la formulación de la teoría de mecánica cuántica no fue un suceso que ocurrió de manera aislada y por tanto que se le pueda acuñar a una sola persona.

Entre las personas que aportaron avances a la mecánica cuántica podemos destacar el trabajo que Planck hizo en 1901 al dar solución al problema de la catástrofe ultravioleta, explicando que el incremento de energía no podía darse de forma continua sino discreta, proponiendo de este modo los cuantos de energía. Esta idea de cuantos fue utilizada en 1905 por Einstein para explicar el efecto fotoeléctrico. Uno de los resultados del trabajo de Einstein fue la dualidad del fotón al propagarse como una onda y partícula. A su vez Bohr en 1913 también uso la idea de cuantos para cuantizar el momento angular, hipótesis que le sirvió para explicar la estabilidad atómica y el espectro de emisión del átomo de Rutherford. Además de los aportes que hicieron Pauli, De Broglie, Davisson y Germer, Born, Schrödinger y Heisenberg, este último se destacó por enunciar el principio de incertidumbre, del cual hablaremos en seguida.

2.1. El principio de incertidumbre

En esencia una de las características de la segunda ley de Newton, es que dadas las coordenadas iniciales y la velocidad de una partícula $r(0)$ y $\dot{r}(0)$ respectivamente, uno puede conocer todas las fuerzas que actúan sobre la partícula, a este tipo de sistema se le conoce como deterministas. Sin embargo, esta idea fue rota por la mecánica cuántica, en particular fue Heisenberg quien introdujo la idea de una mecánica no determinista mediante su principio de incertidumbre.

Ese principio establece la idea de que si el momento lineal de una partícula es conocido, entonces la posición de la misma partícula sería desconocida. Pensemos en un experimento idéntico que involucra un electrón, el cual se repite muchas veces y en cada una de esas repeticiones es medida la posición del electrón, entonces aunque la configuración del experimento es idéntica, es decir el momento es el mismo en cada una de las repeticiones del experimento, la medición de la posición del electrón será diferente. Si nombramos $\langle x \rangle$ como la posición promedio de la partícula, entonces podemos escribir la desviación cuadrática media como

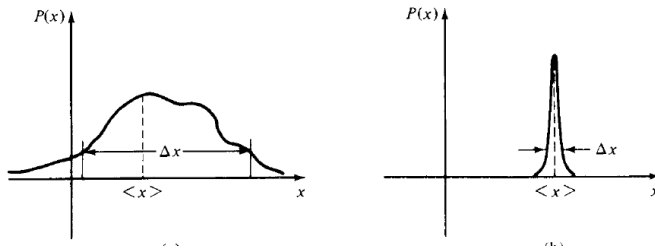
$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle, \quad (2.1)$$

donde Δx denota la desviación estándar. Si Δx es pequeño entonces la probabilidad que x sea el valor promedio en cada medición será grande. Por otro lado, si el valor de Δx es grande, entonces habría menos probabilidades de que x sea el valor promedio, es decir habría menos certeza para dar una estimación de la posición. Por este motivo Δx se conoce como incertidumbre de x .

Este concepto de incertidumbre también se extendió para otras cantidades físicas como la energía E , el campo magnético \vec{B} , el momento angular L y el momento lineal p . Heisenberg formuló su principio de incertidumbre como una desigualdad que relaciona dos incertidumbres, en este caso de la posición y del momento lineal

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar, \quad (2.2)$$

donde $\hbar = h/2\pi$. Del principio de incertidumbre (2.2) se sigue que si se tiene la certeza de la posición de la partícula, es decir $\Delta x = 0$, entonces hay

Figura 2.1: Incertidumbre de x .

una total incertidumbre de la posición de la partícula, es decir $\Delta p = \infty$. El principio de incertidumbre no es único, de hecho se puede escribir en cualesquiera dos variables conjugadas, es decir que cumplan la desigualdad (2.2), como la energía y el tiempo (E, t) o los momentos angulares (L_x, L_y).

Se dice que una ecuación describe un sistema cuántico, si sus variables cumplen el principio de incertidumbre de Heisenberg, dado por la ecuación (2.2) o bien por cualquier par de variables conjugadas. Por otro lado, Robertson probó en 1929 que el principio de incertidumbre podía escribirse como una relación de conmutación [30]

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \frac{\hbar}{2}, \quad (2.3)$$

donde \hat{x}, \hat{p} denotan los operadores de la posición y el momento, de los cuales hablaremos a detalle en la siguiente sección.

2.2. Postulados de la mecánica cuántica

Los postulados de la mecánica cuántica se pueden encontrar en distintas fuentes. En cada una de ellas se puede encontrar un distinto número de postulados, pero en esencia toda la mecánica cuántica se puede construir como consecuencias de los siguientes 4 postulados [1].

2.2.1. Postulado I

Cualquier observable A en un sistema físico le corresponde un operador \hat{A} , tal que la medición de A produce valores “ a ” que son los valores propios del operador \hat{A} , es decir que a satisface la ecuación de valores propios

$$\hat{A}\varphi = a\varphi, \quad (2.4)$$

donde φ denota la función propia del operador \hat{A} y su correspondiente valor propio a .

Consideremos, a manera de ejemplo el operador correspondiente al observable del momento lineal

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla, \quad (2.5)$$

con la finalidad de mostrar cuales son las funciones y valores propios del operador \hat{p} . Sin perdida de generalidad consideremos una partícula libre que se mueve solo en dirección x , de este modo el operador de momento se reduce a

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.6)$$

y por tanto su ecuación de valores propios es

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\varphi = p\varphi, \quad (2.7)$$

los valores p representan los únicos valores posibles que se obtienen de la medición del momento en x . La función propia φ corresponde a un valor específico del momento p , en el postulado III mostraremos que φ esta vinculada con una densidad de probabilidad.

Dado que consideramos una partícula libre, la solución de la ecuación (2.7) es

$$\varphi(x) = Ae^{ikx}, \quad (2.8)$$

con $k = p/\hbar$ y k denota el número de onda. La solución (2.8) en realidad es una familia de soluciones que depende del valor del número de onda, cuando se tiene un valor fijo de k es común denotar a la función de onda como φ_k .

La función propia (2.8) es una solución periódica, es decir

$$e^{ikx} = e^{ik(x+\lambda)}, \quad (2.9)$$

de donde podemos obtener que su longitud de onda λ estaría dada por

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad (2.10)$$

escribiendo la ecuación (2.10) en términos del momento se obtiene la ecuación la relación de Broglie

$$p = \frac{h}{\lambda}, \quad (2.11)$$

y por tanto, la solución de la función propia φ del operador de momento \hat{p} correspondiente al valor propio p , tiene como longitud de onda la longitud de onda de Broglie.

De este modo, la definición del operador del momento (2.5) y la ecuación de valores propios (2.7) implican la relación de Broglie y que la solución de la función propia sea una ecuación de onda.

2.2.2. Postulado II

Una medida del observable A que genera el valor propio "a" deja el sistema en el estado φ_a .

A manera de ejemplo supongamos que se mide la posición de una partícula libre en $x = x'$. Por el primer postulado de la mecánica cuántica tenemos que el operador de posición \hat{x} debe satisfacer una ecuación de valores propios. El segundo postulado establece que la medida de x que genera el valor propio x' deja a la partícula en la función propia correspondiente a x' , esto se puede expresar matemáticamente con la expresión

$$\hat{x}\delta(x - x') = x'\delta(x - x'), \quad (2.12)$$

donde $\delta(x - x')$ denota la delta de Dirac. La delta de Dirac se define a partir de dos propiedades. La primera propiedad en realidad está dada por dos propiedades de integración:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x')dx = f(x'), \quad (2.13)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x')dx = 1. \quad (2.14)$$

La segunda propiedad es la definición más habitual de la delta Dirac

$$\delta(x - x') = \begin{cases} 1 & \text{sí } x = x', \\ 0 & \text{sí } x \neq x'. \end{cases} \quad (2.15)$$

Cabe mencionar que de la ecuación (2.13), se sigue que la delta de Dirac, es en realidad una densidad de distribución.

Por otro lado, una manera de visualizar la delta de Dirac es graficando el caso cuando $x' = \epsilon$ con $\epsilon \rightarrow 0$ como se ve en la figura (2.2). Podemos notar que en el punto cuando $x = \epsilon$ el valor de $\delta(x) \rightarrow \infty$, esto mas que interpretarse como una divergencia, físicamente nos da información que la partícula se encuentra en este punto.

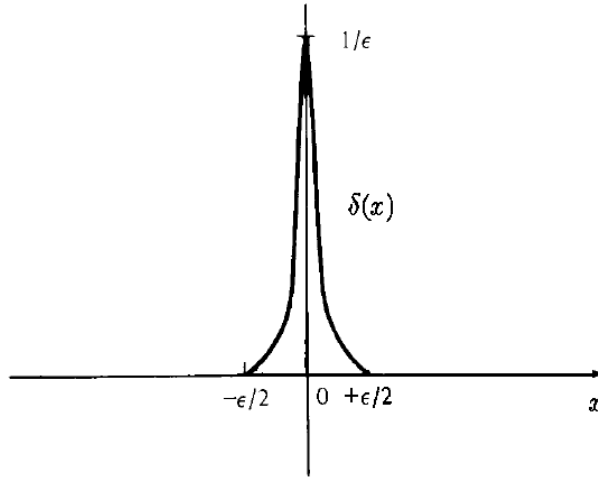


Figura 2.2: Gráfica de la función delta de Dirac.

2.2.3. Postulado III

El estado de un sistema en cualquier instante de tiempo puede ser representado con una función de estado o función de onda $\psi(\bar{x}, t)$, la cual es de clase C^k , es decir ψ es continua y diferenciable. Toda la información de los posibles estados del sistema esta contenida en la función de onda. Si un

sistema es descrito por $\psi(\bar{x}, t)$, el valor promedio de cualquier observable A al tiempo t está dado por

$$\langle A \rangle = \int \psi^* \hat{A} \psi d^3x, \quad (2.16)$$

al valor promedio $\langle A \rangle$ se le suele llamar como valor de expectación de A .

El significado físico de un observable A involucra el concepto de probabilidad. Pensemos en un experimento X en el cual se mide al observable A , cada una de estas repeticiones del experimento tiene condiciones iniciales idénticas, es decir $\psi(\bar{x}, 0)$. Al tiempo t , se mide al observable A y se obtiene el conjunto de valores $\{A_1, \dots, A_n\}$. En este caso el promedio para A estaría dada para el caso discreto por

$$\langle A \rangle = \sum_i A_i P(A_i), \quad (2.17)$$

con $P(A)$ una función de probabilidad. Para el caso cuando los valores de A comprendan un conjunto continuo, se tiene

$$\langle A \rangle = \int AP(A)dA, \quad (2.18)$$

donde la integral es sobre todos los valores de A y $P(A)$ se conoce como densidad de probabilidad. Dado que $\langle A \rangle$ es el valor promedio del observable A es por eso que recibe el nombre de valor de expectación, porque es el valor con más probabilidades que podemos obtener al medir A . Cabe mencionar que el valor de expectación tiene sentido cuando la incertidumbre del observable A dado por la ecuación (2.1) es un valor pequeño comparado al valor promedio.

Una interpretación física de la función de onda $\psi(\bar{x}, t)$ se produce al comparar la ecuación (2.18) con el postulado III de la mecánica cuántica dado por (2.16). Al hacerlo podemos concluir que $|\psi(\bar{x}, t)|^2$ representa la densidad de probabilidad del observable A . El hecho de que $\psi(\bar{x}, t)$ sea una densidad de probabilidad, impone una condición de normalización dada por

$$\int |\psi(\bar{x}, t)|^2 d^3x = 1. \quad (2.19)$$

Para ilustrar este hecho, pensemos una partícula que se mueve en una sola dimensión y cuya función de onda es

$$\psi(x, t) = A \exp \left[\frac{-(x - x_0)^2}{4a^2} \right], \quad (2.20)$$

donde las constantes a y x_0 son constantes dadas y A es una constante a determinar. Con la finalidad de obtener el valor de la constante A , se sigue de la ecuación (2.20)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx &= A^2 a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\eta^2}{2}} d\eta \\ &= \sqrt{2\pi} A^2 a, \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde se ha usado el cambio de variable $\eta = (x - x_0)/a$. Al sustituir (2.21) en (2.19) se obtiene

$$A = \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{2\pi}}}, \quad (2.22)$$

y por tanto la función de onda normalizada es

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{2\pi}}} \exp \left[\frac{-(x - x_0)^2}{4a^2} \right]. \quad (2.23)$$

Además, usando el postulado III de la mecánica cuántica, podemos obtener el valor de expectación de la posición de la partícula, al usar la función de onda (2.23) y el operador asociado a la posición $\hat{x} = x$, tenemos

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x \psi \\ &= A^2 a^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\eta^2}{2}} \left(\eta + \frac{x_0}{a} \right) d\eta \\ &= x_0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

de este modo el valor de expectación o valor promedio es x_0 . Además si consideramos el caso cuando a^2 es la incertidumbre de la posición Δx , entonces la densidad de probabilidad $|\psi|^2$ es en realidad la distribución de probabilidad normal o Gaussiana.

2.2.4. Postulado IV

La evolución temporal de la función de onda $\psi(\bar{x}, t)$ o función de estado, es dada por la ecuación

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\bar{x}, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(\bar{x}, t), \quad (2.25)$$

donde \hat{H} es el operador Hamiltoniano definido por

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m^2} + \hat{V}(\bar{x}), \quad (2.26)$$

con m como la masa de la partícula.

La ecuación (2.25) se conoce como la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. Con la finalidad de deducir la solución para la función de onda ψ usaremos la técnica de variables separables, de este modo podemos escribir la función de onda como

$$\psi(x, t) = \varphi(x)T(t), \quad (2.27)$$

sustituyendo la ecuación (2.27) en la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo se obtiene

$$i\hbar \frac{\dot{T}}{T} = \frac{\hat{H}\varphi}{\varphi}, \quad (2.28)$$

donde el punto denota la derivada con respecto al tiempo.

Por otro lado, supongamos que \hat{H} no tiene dependencia temporal, entonces se cumple la ley de la conservación de la energía y por tanto el Hamiltoniano satisface la ecuación de valores propios dada por

$$\hat{H}\varphi = E\varphi, \quad (2.29)$$

donde (2.29) se conoce como la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. Sustituyendo la ecuación (2.29) en la ecuación (2.28) se obtiene la ecuación

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{iE}{\hbar} \right) T = 0, \quad (2.30)$$

cuya solución es

$$T(t) = A_1 \exp \left[-\frac{iEt}{\hbar} \right], \quad (2.31)$$

donde A_1 es una constante.

Para resolver la parte espacial de la ecuación de onda ψ , supongamos que el operador \hat{H} describe a una partícula libre de masa m , en este caso el operador Hamiltoniano se reduce a

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m^2}, \\ &= -\frac{i\hbar^2}{2m^2}\nabla^2,\end{aligned}\tag{2.32}$$

al sustituir el operador \hat{H} en la ecuación (2.29) obtenemos la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo dada por

$$\nabla^2\varphi + \frac{\hbar^2 E}{2m^2}\varphi = 0,\tag{2.33}$$

esta ecuación corresponde a la ecuación de una onda con longitud de onda dada por $k^2 = 2mE/\hbar^2$, cuya solución general está dada por

$$\varphi(\bar{x}) = A_2 e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}} + A_3 e^{-i\bar{k}\cdot\bar{x}},\tag{2.34}$$

con A_2, A_3 constantes. El signo de la exponencial determina la orientación con la que se propaga la onda, así que sin pérdida de generalidad podemos elegir $A_3 = 0$, de este modo la solución para la parte espacial de la función de onda se reduce a

$$\varphi(\bar{x}) = A_2 e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}},\tag{2.35}$$

φ es la función propia correspondiente al valor propio $E = \hbar^2 k^2/2m$, dado que E es un conjunto de valores continuos, escribiremos φ_k para indicar la función propia correspondiente al valor E_k .

Finalmente al sustituir las ecuaciones (2.35) y (2.31) en la ecuación (2.27) tenemos

$$\psi_k(\bar{x}, t) = A \exp\left[i\left(\bar{k}\cdot\bar{x} - \frac{E_k}{\hbar}t\right)\right],\tag{2.36}$$

donde ψ es la solución general de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y describe la propagación de una onda en dirección \bar{x} y con velocidad E_k/\hbar .

Por otro lado, para resolver de la ecuación de Schödinger dependiente del tiempo, introducimos el operador unitario \hat{U} definido por

$$\hat{U} \equiv \exp \left[\frac{-it\hat{H}}{\hbar} \right], \quad (2.37)$$

dado que \hat{H} es también un operador, el operador \hat{U} se escribe en términos de la serie de Taylor

$$\hat{U} = \hat{1} - \frac{it\hat{H}}{\hbar} + \frac{1}{2!} \left(\frac{it\hat{H}}{\hbar} \right)^2 + \dots \quad (2.38)$$

Ahora bien, el operador \hat{U}^{-1} es el factor integrante de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, así que multiplicando por este factor a la ecuación (2.25) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\exp \left(\frac{it\hat{H}}{\hbar} \right) \psi(\bar{x}, t) \right] = 0, \quad (2.39)$$

cuya solución es

$$\psi(\bar{x}, t) = \exp \left(-\frac{it\hat{H}}{\hbar} \right) \psi_0(\bar{x}, 0), \quad (2.40)$$

se puede observar que $\psi(\bar{x}, 0)$ depende de una condición de estado inicial $\psi_0(\bar{x}, t)$ y del Hamiltoniano.

Cabe mencionar que del cuarto postulado de la mecánica cuántica se destaca el hecho de que para cuantizar un sistema se utiliza el formalismo hamiltoniano. Sin embargo, cuando se extiende el formalismo de cuantización a un campo escalar, es más común hacerlo mediante el formalismo lagrangiano, como veremos a continuación.

2.3. Cuantización canónica de un campo escalar

En teoría cuántica de campos en lugar de cuantizar una partícula, consideraremos un campo. Si bien existen campos escalares y campos vectoriales, entre otros, nuestro interés en esta sección reside en la cuantización de

un campo escalar $\phi(x^\mu)$. Iniciaremos este proceso de cuantización canónica definiendo la acción que describe un campo escalar [19]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (2.41)$$

donde g es el determinante del tensor métrico definido en (1.1.11), \mathcal{L} denota la densidad lagrangiana del campo escalar $\phi(x^\mu)$. Usando el principio de mínima acción, se puede deducir que la dinámica para el campo ϕ está dada por las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial\phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right] = 0, \quad (2.42)$$

donde el momento canónico para el campo escalar ϕ se define de la forma

$$\Pi^\mu = \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\phi)}. \quad (2.43)$$

Ahora bien, para un campo escalar ϕ , el principio de incertidumbre (2.3) se extiende mediante la relación de conmutación

$$[\phi(\bar{r}, t), \Pi^0(\bar{r}', t)] = i\hbar\delta^{(3)}(\bar{r} - \bar{r}'), \quad (2.44)$$

con \bar{r} el vector posición y $\delta^{(3)}(\bar{r} - \bar{r}')$ es la delta 3-dimensional de Dirac y

$$\Pi^0 = \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial\dot{\phi}}. \quad (2.45)$$

La densidad lagrangiana para un campo escalar en un espacio-tiempo de Minkowski es dada [19] por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} - \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad (2.46)$$

donde hemos empleado para fines ilustrativos un potencial de la forma $V(\phi) = m^2\phi^2/2$. Se sigue de (2.46) y (2.42) que la ecuación de campo resulta ser

$$\square\phi + m^2\phi = 0, \quad (2.47)$$

donde $\square\phi \equiv \partial^\mu\partial_\mu\phi$ denota el operador D'Alambertiano para el espacio-tiempo de Minkowski. Notemos que (2.47) es una ecuación diferencial lineal, de ahí que podemos usar el principio de superposición y de esta manera poder reescribir el campo escalar ϕ como una expansión de Fourier

$$\phi(t, \bar{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left[\hat{a}_k e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}} \xi_k(t) + \hat{a}_k^\dagger e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}} \xi_k^*(t) \right], \quad (2.48)$$

donde $\xi_k(t)$ se llaman modos de oscilación, $*$ denota el conjugado de los modos, \hat{a}_k^\dagger y \hat{a}_k son los operadores de creación y aniquilación respectivamente, que satisfacen las relaciones de conmutación

$$\left[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger \right] = \delta^{(3)}(\bar{k} - \bar{k}'), \quad (2.49)$$

$$\left[\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger \right] = \left[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'} \right] = 0. \quad (2.50)$$

Por otro lado, la relación de conmutación (2.44) puede ser escrita en términos del campo y su derivada temporal mediante

$$\left[\phi(t, \bar{r}), \dot{\phi}(t, \bar{r}') \right] = i\hbar\delta^{(3)}(\bar{r} - \bar{r}'). \quad (2.51)$$

Sustituyendo (2.48) en (2.51) y empleando las relaciones de conmutación (2.49) y (2.50) se obtiene que, para que la ecuación (2.51) se satisfaga debe cumplirse que

$$\xi_k \dot{\xi}_k^* - \xi_k^* \dot{\xi}_k = i. \quad (2.52)$$

Esta condición se conoce como condición de renormalización y garantiza que el campo cuántico ϕ satisfaga el principio de incertidumbre. Ahora, para el espacio-tiempo de Minkowski la ecuación (2.47) adquiere la forma

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi - \nabla^2\phi + m^2\phi = 0. \quad (2.53)$$

Empleando la expansión de Fourier (2.48) en (2.53) se obtiene la ecuación para los modos

$$\ddot{\xi}_k + \omega^2\xi_k = 0, \quad (2.54)$$

donde

$$\omega^2 = (k^2 + m^2). \quad (2.55)$$

La solución general de (2.54) es

$$\xi_k = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}, \quad (2.56)$$

donde A y B son constantes. Para la elección de un vacío cuántico es posible elegir A o B nulas. A este vacío se le conoce como de Bunch-Davies. Así, tomando $B = 0$ y en la condición de renormalización (2.52) se llega a la solución normalizada

$$\xi_k = \sqrt{\frac{i}{2\omega}} e^{i\omega t}. \quad (2.57)$$

De esta manera, dado que ϕ está escrito en términos de sus modos cuánticos de oscilación ξ_k y que éste respeta el principio de incertidumbre de Heisenberg decimos que el campo ϕ está cuantizado.

La teoría cuántica de campos ha permitido desarrollar la teoría electro-débil, la cual es una teoría de unificación entre las interacciones electromagnética y débil, con la finalidad de tener una teoría de unificación. Por otro lado también existen teorías que intentan unificar la mecánica cuántica con la teoría de relatividad general. En la siguiente sección hablaremos de la teoría de cuantización de Wheeler-DeWitt.

2.4. La cuantización de Wheeler-DeWitt.

Las bases de la cosmología cuántica fueron cimentadas en la década de los 60's por Wheeler y DeWitt. Esta teoría es descrita por la ecuación de Wheeler-DeWitt que considera que el universo es descrito a escala cuántica por una función de onda $\psi(h_{ij}, \phi)$, la cual es función de una métrica espacial h_{ij} y de un campo de materia $\phi(x^\mu)$ [20]. Con la finalidad de estudiar dicha ecuación partamos de considerar la acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{M_p^2 R}{16\pi} + g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (2.58)$$

donde M_p denota la masa de Planck, R es el escalar de curvatura de Ricci definido en (1.24), $g^{\nu\mu}$ es el inverso del tensor métrico (1.9) y V es el potencial del campo de materia ϕ .

Asumiendo que el universo es homogéneo e isotrópico espacialmente a gran escala, podemos considerar que el campo ϕ solo tiene dependencia temporal $\phi = \phi(t)$ y que la métrica de FLRW es dada por

$$ds^2 = N^2(t)dt^2 - a^2(t)d\Omega_3^2, \quad (2.59)$$

donde $N(t)$ es una función con la cual el tiempo es medido, $a(t)$ es el factor de escala, y $d\Omega_3^2$ es el elemento diferencial de línea de una 3-esfera. Sustituyendo (2.59) en la ecuación (2.58) e integrando con respecto a un volumen finito del universo, se obtiene ([21] , pág. 196)

$$L = -\frac{3M_p^2\pi}{4} \left(\frac{\dot{a}^2 a}{N} - Na \right) + 2\pi^2 a^3 N \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2N^2} - V \right), \quad (2.60)$$

donde $L = \sqrt{-g} \mathcal{L}$. Con la finalidad de reescribir la ecuación (2.60) como un hamiltoniano, procederemos a calcular los momentos canónicos, los cuales están dados por

$$P_a = -\frac{3M_p^2\pi}{2} \frac{\dot{a}a}{N}, \quad (2.61)$$

$$P_\phi = \frac{2\pi^2 a^3}{N} \dot{\phi}, \quad (2.62)$$

$$P_N = 0. \quad (2.63)$$

De la ecuación (2.63) se sigue que las variables que aportan dinámica solo son a y ϕ . Además, se sigue de las ecuaciones (2.60)-(2.62) que el hamiltoniano toma la forma

$$H = \frac{N}{a} \left(\frac{1}{\pi^2 a^2} P_\phi^2 + 2\pi^2 a^4 V \right) - \frac{N}{a} \left(\frac{1}{3M_p^2\pi} P_a^2 + \frac{3\pi}{4} M_p^2 a^2 \right) \quad (2.64)$$

$$= H_\phi + H_a, \quad (2.65)$$

donde H_ϕ y H_a son respectivamente Hamiltonianos efectivos para los campos ϕ y a . Usando el primer postulado de mecánica cuántica, promovemos

las variables y los momentos como operadores, de forma

$$\begin{aligned}\hat{\phi} &= \phi, & \hat{P}_\phi &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}, \\ \hat{a} &= a, & \hat{P}_a &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial a},\end{aligned}\tag{2.66}$$

de este modo el operador Hamiltoniano es

$$\hat{H} = \tilde{N} \left[\frac{\hbar^2}{4\pi^2 a^2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{\hbar^2}{4\pi^2 a^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{3}{4} \pi M_P^2 a^2 + 2\pi^2 a^4 V(\phi) \right], \tag{2.67}$$

donde $\tilde{N} = N/a$. Finalmente si aplicamos el hamiltoniano (2.67) a una función de onda obtenemos

$$\left[\frac{\hbar^2}{4\pi^2 a^2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{\hbar^2}{4\pi^2 a^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{3}{4} \pi M_P^2 a^2 + 2\pi^2 a^4 V(\phi) \right] \psi(a, \phi) = 0, \tag{2.68}$$

esta ecuación es conocida en la literatura como la ecuación de Wheeler-DeWitt. Se puede mostrar que la ecuación de (2.68) tiene por solución la función de onda dada por [21]

$$\psi(a, \phi) = N \exp \left(\frac{\pi M_P^2 a^2}{2} \right). \tag{2.69}$$

Ésta es la función de onda que describe el universo de acuerdo con la ecuación de Wheeler-DeWitt.

Una vez que hemos repasado algunos conceptos clave sobre la teoría de mecánica cuántica. En específico sobre la manera de cuantizar cantidades físicas asociadas a partículas, o un campo escalar, estamos en posición para comenzar a construir un modelo cuántico del universo mediante la ecuación de Wheeler-DeWitt en el que la geometría de fondo sea cuantizable. Esto lo mostraremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Geometría aleatoria cuántica relativista

Iniciaremos este capítulo aplicando algunos conceptos de la teoría de matrices aleatorias para estudiar un primer comportamiento de una métrica cuyas entradas sean variables aleatorias. Posteriormente formularemos un principio de incertidumbre sobre una variedad diferenciable, el cual será de suma importancia para la obtención de un operador métrico.

Además extenderemos el formalismo ADM a una geometría del tipo Weyl-Integrable con la finalidad de poder cuantizar una teoría escalar-tensorial de la gravedad mediante la ecuación Wheeler-DeWitt. Finalmente cuantizaremos una geometría de Weyl-Integrable usando la condición de no-metricidad.

3.1. Matrices aleatorias

Como hemos visto en el capítulo 1 de esta tesis, la métrica es uno de los objetos matemáticos que destacan al describir una geometría. No solo por el hecho de ser parte de la ecuación de compatibilidad con la conexión, incluso como lo muestra el teorema de Levi-Civita generalizado una parte de la conexión se escribe en términos de la métrica, sino también por el hecho que la curvatura misma de una variedad puede, para algunos casos,

ser descrita en términos de la métrica. Teniendo por objetivo construir un formalismo de una geometría aleatoria o cuantizable, como un primer paso consideraremos la teoría de matrices aleatorias para construir una métrica aleatoria.

Sea L la lagrangiana asociada a una partícula libre dada por

$$L = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu, \quad (3.1)$$

con $g_{\mu\nu}$ siendo las componentes coordenadas del tensor métrico y u^μ la 4-velocidad de la partícula. Dado que el tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ tiene representación matricial, pensemos que $g_{\alpha\beta}$ posee una representación matricial en la que cada entrada es una variable aleatoria. Así, el lagrangiano puede ser escrito en forma matricial como

$$L_g = u^T g u, \quad (3.2)$$

con u denotando el vector de 4-velocidad y u^T denotando el vector u traspuesto. El Hamiltoniano asociado a (3.1) es

$$H_g = \frac{1}{2}u^T g u. \quad (3.3)$$

Por otro lado, el elemento diferencial de línea $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ puede ser escrito en términos de la 4-velocidad en la forma

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu, \quad (3.4)$$

donde τ denota el tiempo propio de la partícula. La expresión (3.4) puede escribirse en forma matricial como

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = u^T g u. \quad (3.5)$$

Multiplicando por la izquierda por u llegamos a la ecuación de valores propios

$$g u = \lambda u, \quad (3.6)$$

donde $\lambda = \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2$ denota el conjunto de valores propios. Sustituyendo (3.6) en (3.3) el hamiltoniano adquiere la forma

$$H_g = \frac{\lambda}{2} u^T u. \quad (3.7)$$

Por otro lado, usando el hecho de que en un espacio euclídeo el Hamiltoniano para una partícula libre relativista sería

$$H_e = \frac{1}{2} u^T u, \quad (3.8)$$

no es difícil verificar que se cumple la expresión

$$H_g = \lambda H_e. \quad (3.9)$$

Esta expresión significa que la energía de la partícula libre relativista estaría dada por un espectro de energías en donde el estado base sería la energía de la misma en un espacio euclídeo. Sin embargo, el problema de esta interpretación es que en física relativista no se trabaja con métricas euclidianas sino lorentzianas. Esto lleva a pensar que en realidad es estado base para la energía de la partícula puede obtenerse al considerar una transformación de Wick en la componente temporal dada $t \rightarrow it$. Esto tiene sentido en un escenario de pre-inflación del universo temprano en donde una transición de fase topológica caracterizada por una rotación de Wick, pudo dar origen al tiempo en el universo. En este sentido, la época en la cual un argumento como el derivado de (3.9) puede tener sentido es en una época anterior al origen del tiempo, es decir, anterior a pre-inflación, y esa época se conoce como régimen de gravedad cuántica.

Otra consecuencia de (3.7) aparece cuando consideramos que la métrica aleatoria g se considera como pequeñas fluctuaciones aleatorias de la métrica de Minkowski η . Esto último se expresa por

$$g = \eta + \epsilon \delta g e^{\epsilon \delta g}, \quad (3.10)$$

donde $\epsilon = l^{(m\acute{a}x)}/l_p$ siendo $l^{m\acute{a}x}$ la escala de longitud máxima asociada a las fluctuaciones aleatorias de la métrica, l_p es la longitud de Planck y δg describe las fluctuaciones aleatorias de la métrica. Así, para $l < l_p$ se

cumple que $\epsilon \ll 1$. Además como $l_p = \hbar M_p^{-1}$ para unidades $c = 1$, entonces podemos afirmar que $\epsilon \simeq \hbar$. Sustituyendo (3.10) en (3.6) obtenemos

$$\eta u = \lambda_M u, \quad \epsilon \delta g e^{\epsilon \delta g} u = \delta \lambda u, \quad (3.11)$$

donde hemos considerado $\lambda = \lambda_M + \delta \lambda$. En este caso, el Hamiltoniano (3.7) implica

$$H_g = H_\eta + \delta H_g, \quad (3.12)$$

siendo $H_\eta = \frac{1}{2} \lambda_M u^T u$ y $\delta H_g = \frac{1}{2} \delta \lambda u^T u$. La ecuación (3.12) significa que la energía aleatoria de la partícula relativista puede verse como su energía en un estado base de Minkowski más fluctuaciones aleatorias de la misma.

Ahora, con la idea de ilustrar el procedimiento para obtener los valores propios de la ecuación (3.6) consideremos un espacio de 2 dimensiones. En este caso la matriz g toma la forma

$$g = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

donde las x_i son variables aleatorias. Los valores propios asociados a g entonces son

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(x_1 + x_2 \pm \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + 4x_3} \right). \quad (3.14)$$

Ahora, dado que g es una matriz aleatoria, nos interesa calcular la probabilidad de la variación de sus valores propios, es decir el valor de expectación o promedio $\langle s \rangle$, donde hemos definido el parámetro $s = \lambda_1 - \lambda_2$. De acuerdo con la teoría de matrices aleatorias, el valor esperado de s se define por

$$\langle s \rangle = \int s P(s) ds, \quad (3.15)$$

donde $P(s)$ es la función de densidad de probabilidad. Sin embargo, para obtener $P(s)$ es necesario conocer de manera a priori las funciones de probabilidad de las variables aleatorias x_i . Si asumimos que x_1, x_2 tienen una distribución de probabilidad normal, media cero y varianza uno, i.e.

$N(0, 1)$, y x_3 tiene una distribución de probabilidad normal $N(0, 1/2)$, tenemos que $P(s)$ es dada por la fórmula

$$P(s) = \int \delta \left(s - \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + 4x_3} \right) \rho(g) dx_1 dx_2 dx_3, \quad (3.16)$$

con $\rho(g)$ la función de densidad de probabilidad conjunta para la matriz g , la cual se define mediante [22]

$$\begin{aligned} \rho(g) &= \prod_{i=1}^N \left[\exp \left(-\frac{(g_{ii})^2}{2} \right) / \sqrt{2\pi} \right] \prod_{i<j} \left[\exp \left(-(g_{ij})^2 \right) / \sqrt{\pi} \right] \\ &= \frac{e^{-\frac{x_1^2}{2}} e^{-\frac{x_2^2}{2}} e^{-x_3^2}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2\pi} \sqrt{\pi}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Así, sustituyendo (3.17) en (3.16) e integrando se obtiene que la función de densidad de probabilidad es

$$P(s) = \frac{s}{2} e^{-\frac{s^2}{4}}. \quad (3.18)$$

Empleando la ecuación (3.18) el valor de expectación (3.15) adquiere la forma

$$\langle s \rangle = \sqrt{\pi}. \quad (3.19)$$

Esta ecuación implica que la probabilidad que los valores propios sean iguales no es cero, y por tanto existe una variación de ellos. De hecho, su incertidumbre está dada por la expresión

$$\begin{aligned} \Delta s &= \sqrt{\langle s \rangle^2 - \langle s^2 \rangle} \\ &= \sqrt{2} \Gamma \left(\frac{5}{4} \right) - \pi, \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde Γ denota la función gamma.

Por otro lado, como sabemos de mecánica cuántica, para que un sistema sea cuántico es necesario que se satisfaga un principio de incertidumbre. En la siguiente sección construiremos a partir de un concepto geométrico un principio de incertidumbre relativista.

3.2. Principio de incertidumbre geométrico relativista

Pensemos un momento en dos conceptos de la mecánica cuántica. El principio de incertidumbre de Heisenberg, el cual se establece mediante la relación de conmutación

$$[\hat{x}, \hat{p}] = -i\hbar, \quad (3.21)$$

y el segundo concepto es el primer postulado de la mecánica cuántica, el cual establece que a todo observable físico le corresponde un operador. Por ejemplo, el momento lineal tiene asociado el operador diferencial

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla. \quad (3.22)$$

Con la idea ahora de obtener un principio de incertidumbre en una variedad diferenciable desde principios geométricos, consideremos una curva diferenciable $\lambda : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$, con σ el parámetro de la curva. En general el campo de vectores tangentes a la curva es determinado por

$$\bar{v} \equiv \frac{d}{d\sigma} = \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}. \quad (3.23)$$

Así, definimos el operador de momento lineal geométrico como

$$\hat{p} \equiv -i\hbar \frac{d}{d\sigma} = -i\hbar \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}. \quad (3.24)$$

Con ayuda de (3.24) obtenemos la relación de conmutación

$$[\hat{x}^\alpha, \hat{p}] \psi = i\hbar \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \psi, \quad (3.25)$$

donde ψ es una función de onda asociada al sistema cuántico estudiado. Si pensamos que nuestro sistema cuántico es medido por una clase de observadores relativistas caracterizados por una 4-velocidad $U^\alpha \equiv dx^\alpha/d\sigma$, la ecuación (3.25) se escribe como

$$[\hat{x}^\alpha, \hat{p}] = i\hbar U^\alpha. \quad (3.26)$$

Dado que el principio de incertidumbre (3.26) depende explícitamente del observador U^α que hace la medición, en este sentido se trata de un principio

de incertidumbre relativista. Nótese que en (3.26) \hat{p} denota el operador de momento lineal caracterizado por la ecuación de valores propios $\hat{p}\psi = p\psi$. Así, el valor propio p representa una medida del momento de la partícula realizada por los observadores U^λ .

3.3. La métrica aleatoria

Como vimos en el capítulo 1, una de las ideas básicas de la geometría era poder medir distancias de puntos o vectores, y que este concepto estaba vinculado con el tensor métrico (1.2.3). Además de la distancia otros conceptos como la curvatura del espacio (1.18) se definen a partir del tensor métrico, más aun la estructura misma del tipo de geometría que estemos trabajando se define a partir de la condición de metricidad o no metricidad dadas por (1.24) y (1.37) respectivamente. Es por ese motivo que si queremos construir una geometría aleatoria cuántica es importante construir un operador asociado al tensor métrico.

Teniendo como finalidad la construcción de un operador métrico, comencemos considerando una cantidad observable geoméricamente, como lo es la longitud infinitesimal de una curva $\lambda(\sigma)$, dada por el elemento diferencial de línea. Así, postulamos

$$d\hat{s}^2|\psi\rangle = ds^2|\psi\rangle, \quad (3.27)$$

donde $d\hat{s}^2$ es el operador asociado a el espectro de valores propios ds^2 y $|\psi\rangle$ denota la función de onda ψ que hemos venido utilizando pero en la notación de braket.

Por otro lado, sabemos de geometría diferencial que el elemento diferencial de línea está relacionado con el tensor métrico mediante la expresión (1.13). De este modo podemos definir el operador asociado al elemento diferencial de línea como

$$d\hat{s}^2 \equiv \hat{g}_{\alpha\beta} d\hat{x}^\alpha d\hat{x}^\beta, \quad (3.28)$$

donde $\hat{g}_{\alpha\beta}$ y $d\hat{x}^\alpha$ serían los operadores asociado al tensor métrico y a los diferenciales coordenados respectivamente. Supóngase que el operador $d\hat{x}^\mu$

satisface la condición

$$d\hat{x}^\mu|\psi\rangle = dx^\mu|\psi\rangle. \quad (3.29)$$

Así, empleando (3.29) en (3.28) obtenemos

$$d\hat{s}^2|\psi\rangle = dx^\alpha dx^\beta \hat{g}_{\alpha\beta}|\psi\rangle. \quad (3.30)$$

Por otro lado, en (3.27) el valor observado del elemento diferencial de línea puede ser escrito en términos del momento clásico como

$$ds^2 = \frac{(d\sigma)^2}{m^2} g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta \quad (3.31)$$

$$= \frac{(d\sigma)^2}{m^2} p_\alpha p^\alpha, \quad (3.32)$$

donde $p^\alpha = mU^\alpha$. Se sabe además que, el tensor métrico está relacionado con el producto interior de dos vectores mediante la ecuación

$$g(\bar{u}, \bar{u}) = \bar{u} \cdot \bar{u} = u_\alpha u^\alpha, \quad (3.33)$$

siguiendo de manera análoga está ecuación, suponemos que el operador métrico debe satisfacer la condición

$$\hat{g}(\hat{p}, \hat{p}) = \hat{p} \cdot \hat{p}. \quad (3.34)$$

Por tanto al promover la ecuación (3.32) a su forma operatorial y aplicando a la función de onda se tiene

$$d\hat{s}^2|\psi\rangle = \frac{(d\sigma)^2}{m^2} \hat{p} \cdot \hat{p}|\psi\rangle \quad (3.35)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{m^2} dx^\alpha dx^\beta \left(\partial_\alpha \partial_\beta + F_{\alpha\beta}^\lambda \partial_\lambda \right) |\psi\rangle, \quad (3.36)$$

donde para obtener el resultado anterior se ha usando la definición del momento dada por (3.24). Además hemos denotado $\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$ y $F_{\alpha\beta}^\lambda$ es una cantidad auxiliar definida como $F_{\alpha\beta}^\lambda = \partial_\alpha U^\lambda / U^\beta$.

Ahora bien, estamos interesados en saber la escala de longitud de nuestra teoría. Dado que las curvas que consideramos son de la escala de Planck

la cual se denota por l_p , tiene sentido que consideremos $m = m_p$ como la masa de Planck. Además de mecánica cuántica es bien sabido que

$$l_p^2 = \frac{\hbar^2}{m_p^2 c^2}, \quad (3.37)$$

donde c denota la velocidad de luz. De este modo podemos reescribir el elemento diferencial de línea (3.36) como

$$ds^2 = l_p^2 c^2 dx^\alpha dx^\beta \left(\partial_\alpha \partial_\beta + F_{\alpha\beta}^\lambda \partial_\lambda \right). \quad (3.38)$$

Esta expresión nos indica que el operador de diferencial de línea es proporcional a la longitud de Planck. Finalmente si contrastamos las ecuaciones (3.27), (3.28) y (3.36) se sigue que

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = -\frac{\hbar^2}{m^2} \left(\partial_\alpha \partial_\beta + F_{\alpha\beta}^\lambda \partial_\lambda \right). \quad (3.39)$$

Por tanto tenemos una expresión explícita para el operador asociado al tensor métrico, el cual en vista de (3.30) debe satisfacer la ecuación de valores propios

$$\hat{g}_{\alpha\beta} |\psi\rangle = g_{\alpha\beta} |\psi\rangle. \quad (3.40)$$

De esta manera podemos afirmar que $(g_{\alpha\beta})$ es una matriz aleatoria cuántica. No obstante, en la teoría de matrices aleatorias es necesario conocer la función de probabilidad de manera a priori, dicha función de probabilidad estaría determinada por la función de onda $|\psi\rangle$. Sin embargo en mecánica cuántica se cuantiza un observable al obtener dicha función de onda. Es en este sentido que la teoría de matrices aleatorias no es suficiente para construir una geometría aleatoria cuántica, pues no contamos aun con una ecuación que determine la función de onda $|\psi\rangle$ que está asociado con el aspecto probabilístico de la teoría.

Por otro lado, el objetivo principal de este trabajo es construir una geometría aleatoria cuántica, la cual podría aplicarse para cuantizar una teoría de gravitación, en particular una teoría escalar-tensorial geométrica de la gravedad, que como se ha mostrado su geometría de fondo es de Weyl-Integrable. Esta última se formula sobre una variedad Lorentziana tipo espacio-tiempo. El problema principal es que no existe un formalismo de

mecánica cuántica o teoría cuántica de campos que logre cuantizar el tiempo. Una alternativa para cuantizar el espacio-tiempo sería el poder separar la parte espacial de la temporal. Una manera de lograr esta separación es considerando el formalismo ADM del cual hablaremos a continuación.

3.4. Formalismo ADM en una geometría de Weyl Integrable

El formalismo ADM fue propuesto por Arnowitt, Deser y Misner [7] como un mecanismo que permitió la reformulación de la teoría de relatividad general, de una variedad tipo espacio-tiempo a una variedad espacio y tiempo, es decir $\mathcal{M} \cong \mathbb{R} \times \Sigma_t$, donde Σ_t denota una familia de hipersuperficies espaciales.

La teoría de relatividad general en vacío es descrita por la funcional de acción de Einstein-Hilbert

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{R}{16\pi G}, \quad (3.41)$$

donde R es el escalar de curvatura de Ricci definido en (1.24). La acción (3.41) fue construida considerando una geometría de fondo de Riemann, y como consecuencia el formalismo ADM también consideró tal suposición. Como sabemos, la relatividad general es una teoría clásica de gravitación, lo que nos indica que si queremos considerar efectos de gravedad cuántica debemos contar con una teoría que contenga a la relatividad general en algún límite o caso particular. En ese sentido, es un hecho conocido que la teoría de cuerdas, una de las teorías candidatas para la descripción de gravedad cuántica más aceptadas, se reduce a una teoría escalar-tensorial de la gravedad en el límite de bajas energías. Esto nos lleva a pensar que un buen candidato en nuestro caso es una teoría escalar-tensorial de norma geométrica de la gravedad.

Una teoría de este tipo es la empleada por ejemplo en [8]. Su correspondiente funcional de acción es dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\phi} \left[\frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2} \omega(\phi) g^{\alpha\beta} \phi_{;\alpha} \phi_{;\beta} - \frac{1}{4} H_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta} \right], \quad (3.42)$$

donde se denota por $\cdot_{;\alpha}$ a una derivada covariante de norma definida por $\cdot_{;\alpha} \equiv \nabla_{\alpha} + W_{\alpha}$, con W_{α} siendo un campo de norma definido por $W_{\alpha} = \gamma\phi B_{\alpha}$, γ una constante imaginaria, B_{α} un campo de norma y $H_{\alpha\beta} = (W_{\beta})_{;\alpha} - (W_{\alpha})_{;\beta}$ es el tensor de intensidad. Si hacemos variar la acción (3.42) respecto a los símbolos de conexión Γ , obtenemos la condición de no metricidad

$$\nabla_{\mu}g_{\alpha\beta} = \phi_{;\mu}g_{\alpha\beta}, \quad (3.43)$$

la cual corresponde a una geometría de Weyl-Integrable. Cabe mencionar que la acción (3.42) es invariante bajo las transformaciones

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = e^f g_{\alpha\beta}, \quad (3.44)$$

$$\bar{\phi} = \phi + f, \quad (3.45)$$

$$\bar{\omega} \equiv \omega(\bar{\phi} - f) = \omega(\phi), \quad (3.46)$$

$$\gamma\bar{\phi}B_{\alpha} = \gamma\phi B_{\alpha} - \gamma^{-1}f_{;\alpha}, \quad (3.47)$$

con $f = f(x^{\alpha})$ una función bien comportada, donde las ecuaciones (3.44) y (3.45) se conocen en la literatura como el grupo de Weyl.

Dado que la geometría de fondo de la acción (3.42) no corresponde a una geometría de Riemann, es necesario extender el formalismo ADM a una geometría de Weyl-Integrable. Para hacer esta extensión procederemos considerando el siguiente teorema.

Teorema 3.4.1. *Sea (\mathcal{M}, g) una variedad Lorentziana. Entonces \mathcal{M} puede ser foliada de la forma $X : \mathbb{R} \times \Sigma \rightarrow \mathcal{M}$ donde Σ es una familia de hipersuperficies constantes y \mathcal{M} tiene la topología de $\mathbb{R} \times \Sigma$ [23], [24], [25].*

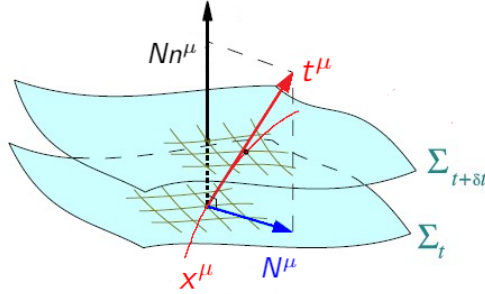
En particular los vectores de \mathcal{M} se escriben como

$$t^{\mu} \equiv \frac{\partial X^{\mu}}{\partial t} = N(X^{\alpha})n^{\mu}(X^{\alpha}) + N^{\mu}(X^{\alpha}), \quad (3.48)$$

donde N se conoce como función de lapso, N^{μ} es el vector de corrimiento, $n^{\mu} = (-N, \bar{0})$ es un vector normal a la familia de hipersuperficies Σ y t^{μ} puede interpretarse como un campo vectorial que describe el flujo temporal.

Más aun, sea p un punto de la variedad \mathcal{M} , el espacio tangente de $T_p(\mathcal{M})$ se puede escribir de manera única en términos de la hipersuperficie en la forma

$$T_p(\mathcal{M}) = N_p(\Sigma) \oplus T_p(\Sigma), \quad (3.49)$$


 Figura 3.1: Foliación $X : \mathbb{R} \times \Sigma \rightarrow \mathcal{M}$

donde $N_p(\Sigma)$ denota el espacio normal a la hipersuperficie Σ en el punto p .

Por si misma, la hipersuperficie Σ es una variedad dotada con una métrica h . Esta métrica h , se conoce como métrica inducida y cumple con las ecuaciones

$$h_{ab} = g_{\mu\nu} X_{,a}^{\mu} X_{,b}^{\nu}, \quad (3.50)$$

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_{\mu} n_{\nu}, \quad (3.51)$$

donde los vectores normales satisfacen $n^{\mu} n_{\mu} = -1$. Los índices latinos corren de 1, 2, 3 mientras que los índices griegos van de 0, 1, 2, 3. Si usamos la relación (3.50) podemos escribir el elemento diferencial de línea de la variedad \mathcal{M} en términos de la métrica de la hipersuperficie

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dX^{\mu} dX^{\nu} \\ &= g_{\mu\nu} \left(\dot{X}^{\mu} dt + X_{,a}^{\mu} dx^a \right) \left(\dot{X}^{\nu} dt + X_{,b}^{\nu} dx^b \right) \\ &= (sN^2 + N_a N^a) dt^2 + 2h_{ab} N^b dx^b dt + h_{ab} dx^a dx^b, \end{aligned} \quad (3.52)$$

donde hemos usado la ecuación (3.48). A la ecuación (3.52) se le conoce como la métrica ADM [7], de ahí que se conozcan en la literatura a las variables N , N^a y h_{ab} como las variables ADM.

Se sigue de la ecuación (3.52) que los componentes de la métrica g en

términos de las variables ADM son

$$g_{00} = N^i N_i - N^2, \quad (3.53)$$

$$g_{0j} = N_j, \quad (3.54)$$

$$g_{ij} = h_{ij}. \quad (3.55)$$

Si bien, sabemos que el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ no es una matriz, si tiene una representación matricial. Este hecho nos permite usar la teoría de matrices por bloques [26] y de este modo llegamos a

$$g^{00} = \frac{-1}{N^2}, \quad (3.56)$$

$$g^{0j} = N^j, \quad (3.57)$$

$$g^{ij} = h^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2}. \quad (3.58)$$

Más aun, el determinante de tensor del métrico también puede ser escrito en términos de las variables ADM quedando [27]

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{h}, \quad (3.59)$$

donde h denota el determinante del tensor métrico h_{ij} .

La métrica inducida $h_{\mu\nu}$ es una cantidad que nos permite definir, de manera única, un operador de derivada covariante \mathcal{D} sobre la familia de hipersuperficies Σ . Así, usando el tensor de proyección $h^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + n^\alpha n_\beta$ en la derivada covariante ∇ se tiene la relación [6]

$$\mathcal{D}_\lambda T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = h_{\mu_1}^{\alpha_1} \dots h_{\mu_p}^{\alpha_p} h_{\beta_1}^{\nu_1} \dots h_{\beta_q}^{\nu_q} h_\lambda^\sigma \nabla_\sigma T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}, \quad (3.60)$$

donde T es un tensor genérico definido por (1.8). Es importante hacer notar, que la derivada covariante \mathcal{D} también mantiene la condición de no metricidad de Weyl Integrable [28], como una consecuencia al proyectar la ecuación (3.43) sobre la hipersuperficie Σ

$$\mathcal{D}_\alpha h_{\mu\nu} = h_\alpha^\sigma h_\mu^\beta h_\nu^\lambda \nabla_\sigma h_{\beta\lambda} \quad (3.61)$$

$$= h_\alpha^\sigma \phi_{,\sigma} h_{\mu\nu}. \quad (3.62)$$

Ahora bien, una vez que tenemos la métrica inducida y un operador de derivada covariante \mathcal{D} nos sería posible comenzar a describir a Σ , sin embargo para tener un panorama más completo, es necesario conocer la manera en la que Σ está embebido en el espacio-tiempo, es decir en la variedad \mathcal{M} . Esta información se encuentra en la manera en la que Σ varia de un punto en otro, y está dada por el tensor de curvatura extrínseca el cual se define como

$$K_{\alpha\beta} = -h_{\alpha}^{\mu}h_{\beta}^{\nu}\nabla_{\mu}n_{\nu}, \quad (3.63)$$

$$= -\nabla_{\alpha}n_{\beta} + n_{\alpha}a_{\beta} + \frac{1}{2}n_{\beta}\phi_{,\mu}h_{\alpha}^{\mu}. \quad (3.64)$$

La ecuación (3.64) se sigue de hacer la proyección de (3.63), donde se utilizo el vector de aceleración

$$a_{\mu} = n^{\alpha}\nabla_{\alpha}n_{\mu}. \quad (3.65)$$

Por otro lado, el tensor de curvatura extrínseca se puede escribir en términos de las variables ADM. Para ello pensemos en la evolución temporal de la métrica h_{ij} la cual es dada por

$$\mathcal{L}_{\partial_t}h_{ij} = \dot{h}_{ij}, \quad (3.66)$$

donde \mathcal{L}_{∂_t} denota la derivada de Lie con respecto al campo temporal. Sustituyendo la ecuación (3.48) en (3.66) se obtiene

$$\dot{h}_{ij} = \mathcal{L}_{Nn^{\mu}\partial_{\mu}}h_{ij} + \mathcal{L}_{N^{\mu}\partial_{\mu}}h_{ij} \quad (3.67)$$

$$= Nn^{\mu}\phi_{,\mu}h_{ij} - 2NK_{ij} + N^{\mu}\phi_{,\mu}h_{ij} + 2\mathcal{D}_{(i}N_{j)}, \quad (3.68)$$

donde los paréntesis denotan la parte simétrica de los índices. Despejando el tensor de curvatura extrínseca de (3.68) se tiene

$$K_{ij} = \frac{1}{N} \left[Nn^{\mu}\phi_{,\mu}h_{ij} + N^{\mu}\phi_{,\mu}h_{ij} + 2\mathcal{D}_{(i}N_{j)} - \dot{h}_{ij} \right]. \quad (3.69)$$

De este modo tenemos una expresión explícita del tensor de curvatura extrínseca en términos de las variables ADM en una geometría de Weyl Integrable es decir $\{h_{ij}, N, N^i, \phi_{\mu}\}$. Cabe mencionar que la expresión del tensor de curvatura extrínseca dada por (3.69) es diferente de la que se obtiene en el formalismo ADM para una geometría Riemanniana [7], el cual es $K_{ij} = -\dot{h}_{ij}/2N$.

Un punto clave del formalismo ADM son las ecuaciones de embebido de Gauss-Codazzi y Ricci las cuales relacionan las curvaturas de la variedad espacio-temporal \mathcal{M} con la variedad $\mathbb{R} \times \Sigma$. Estas ecuaciones están dadas respectivamente por las expresiones

$$h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} h_{\rho}^{\gamma} h_{\delta}^{\sigma(4)} R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = {}^{(3)}R^{\gamma}_{\delta\alpha\beta} + K^{\gamma}_{\alpha} K_{\delta\beta} - K^{\gamma}_{\beta} K_{\alpha\delta}, \quad (3.70)$$

$${}^{(4)}R = h^{\lambda\sigma} h^{\nu\tau(4)} R_{\lambda\nu\sigma\tau} - 2n^{\alpha} n^{\beta(4)} R_{\alpha\beta}, \quad (3.71)$$

donde los superíndices (3) y (4) denotan los tensores o escalares de curvatura en tres y cuatro dimensiones. La ecuación de Ricci puede ser escrita en términos de la curvatura extrínseca al usar la ecuación de Gauss-Codazzi en la forma

$${}^{(4)}R = {}^{(3)}R + K^2 - K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} - 2n^{\alpha} n^{\beta(4)} R_{\alpha\beta}. \quad (3.72)$$

Nótese que por el último término de la derecha, que aun no tenemos una expresión explícita del tensor de curvatura de Ricci cuatro dimensional, en términos de la variedad espacio temporal. Para este fin procederemos considerando la definición del tensor de curvatura para una variedad sin torsión (1.20) de la cual se sigue que

$$n^{\sigma} n^{\mu(4)} R = n^{\mu} (\nabla_{\lambda} \nabla_{\mu} - \nabla_{\mu} \nabla_{\lambda}) n^{\lambda}. \quad (3.73)$$

Empleando la condición de no metricidad (3.43) y la ecuación (3.51) llegamos a

$$\begin{aligned} n^{\sigma} n^{\mu(4)} R = & \nabla_{\lambda} \left[n^{\mu} \nabla_{\mu} n^{\lambda} \right] - n^{\mu} \nabla_{\mu} \left(\phi_{,\alpha} g^{\alpha\lambda} n_{\alpha} + g^{\alpha\lambda} \nabla_{\lambda} n_{\alpha} \right) \\ & - \left(\phi_{,\lambda} g^{\mu\alpha} n_{\alpha} + g^{\mu\alpha} \nabla_{\lambda} n_{\alpha} \right) \left(\phi_{,\mu} g^{\lambda\sigma} n_{\sigma} + g^{\lambda\sigma} \nabla_{\mu} n_{\sigma} \right). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Pero, de la ecuación (3.64) se obtiene una expresión para la derivada 4-dimensional del vector normal, que al sustituirla en la ecuación (3.74) y tras un poco de álgebra se tiene que

$$n^{\sigma} n^{\nu(4)} R_{\sigma\nu} = K^2 - K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} - 3\phi_{,\mu} A^{\mu} + \nabla^{\mu} A^{\mu}, \quad (3.75)$$

donde cabe mencionar que el producto interno $n_{\mu} a^{\mu} = -n^{\mu} \phi_{,\mu}/2$, a diferencia del formalismo ADM en el cual el vector de aceleración es paralelo al vector normal. Además hemos definido el vector auxiliar A^{μ} como

$$A^{\mu} \equiv a^{\mu} + n^{\mu} \left(K - \frac{1}{2} n^{\lambda} \phi_{,\lambda} \right). \quad (3.76)$$

Finalmente, al sustituir la ecuación (3.75) en la ecuación (3.72) obtenemos

$${}^{(4)}R = {}^{(3)}R - K^2 + K^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta} + 6\phi_{,\mu}A^\mu - 2\nabla_\mu A^\mu. \quad (3.77)$$

Dado que hemos considerado una geometría de fondo de Weyl-Integrable, la ecuación (3.77) recibe el nombre de ecuación de Ricci en una geometría de Weyl-Integrable.

Como mencionamos al inicio de esta sección, nuestro objetivo es pasar de una acción escalar-tensorial geométrica de la gravedad (3.42), descrita en una variedad espacio-temporal \mathcal{M} a una descrita en una variedad con espacio y tiempo separados $\mathbb{R} \times \Sigma$. Para tener una expresión explícita del escalar de curvatura, haremos las siguientes consideraciones.

Primero, dada la invarianza de la acción, podemos elegir un campo de norma nulo $\bar{W}_\alpha = 0$ mediante la elección

$$f = \gamma \int W_\alpha dx^\alpha. \quad (3.78)$$

De este modo la acción (3.42) se reduce a

$$s = \int d^4x \sqrt{g} e^{-\phi} \left[\frac{R}{16\pi G} + \frac{\omega}{2} g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} \right]. \quad (3.79)$$

Segundo, usaremos el principio cosmológico, es decir, que el universo es espacialmente homogéneo e isotrópico a gran escala. De este principio se sigue entonces que el campo Weyl es un campo que depende solo de la coordenada temporal

$$\phi(x^\alpha) = \phi(t). \quad (3.80)$$

Por último consideremos una métrica tipo Friedman-Robertson-Walker (FRW) espacialmente plana

$$ds^2 = N(t)^2 dt^2 - a(t)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.81)$$

De este modo al utilizar la información de (3.80) y (3.81) en la ecuación (3.77) se obtiene el escalar de curvatura de Ricci

$${}^{(4)}R = \frac{9}{2N^2} \dot{\phi}^2 - \frac{9}{N^2 a} \dot{\phi} \dot{a} - \frac{12}{a^2 N^2} \dot{a}^2 - \frac{6}{N^3} \dot{N} \dot{\phi} - 2\nabla_\mu A^\mu. \quad (3.82)$$

3.5. ECUACIÓN DE WHEELER-DEWITT PARA UNA TEORÍA ESCALAR-TENSORIAL

Finalmente al sustituir (3.82) en la acción (3.79) podemos escribir la acción en términos de las variables ADM como

$$s = \int d^4x N a^3 e^{-\phi} \left\{ \frac{1}{\kappa} \left[\frac{9}{2N^2} \dot{\phi}^2 - \frac{9}{N^2 a} \dot{\phi} \dot{a} - \frac{12}{a^2 N^2} \dot{a}^2 - 2\nabla_\mu A^\mu - \frac{6}{N^3} \dot{N} \dot{\phi} \right] + \frac{\omega}{2N^2} \dot{\phi}^2 \right\}, \quad (3.83)$$

donde $\kappa = 16\pi G$ y el punto denota derivada temporal.

Una vez que hemos podido escribir la acción en una variedad tipo espacio y tiempo, podemos continuar con el proceso de cuantización de nuestra teoría. Para ello utilizaremos la ecuación de Wheeler-DeWitt. Así, debemos obtener el Hamiltoniano de la acción (3.83).

3.5. Ecuación de Wheeler-DeWitt para una teoría escalar-tensorial

Como se sabe, la ecuación de Wheeler-DeWitt formo las bases de lo que hoy se conoce como cosmología cuántica. Esta ecuación es la ecuación análoga a la de Schrödinger para un formalismo de gravitación. Para su obtención es necesario de tener un operador Hamiltoniano.

Con la finalidad de construir el Hamiltoniano de nuestra teoría reescribimos la acción (3.83) como

$$s = \int d^4x N a^3 \frac{e^{-\phi}}{\kappa} \left[\frac{9}{2N^2} \dot{\phi}^2 - \frac{9}{N^2 a} \dot{\phi} \dot{a} - \frac{12}{a^2 N^2} \dot{a}^2 - \frac{6}{N^3} \dot{N} \dot{\phi} + \frac{\omega \kappa}{2N^2} \dot{\phi}^2 \right] - 2 \int d^4x N a^3 e^{-\phi} \nabla_\mu A^\mu. \quad (3.84)$$

Integrando por partes la segunda integral y eliminando términos de divergencia llegamos a

$$s = \int dt d^3x \frac{e^{-\phi}}{\kappa} \left[\frac{a^3(5 + \omega \kappa)}{2N} \dot{\phi}^2 - \frac{3a^2}{N} \dot{\phi} \dot{a} - \frac{12a}{N} \dot{a}^2 - \frac{4a^3}{N^2} \dot{N} \dot{\phi} \right] \quad (3.85)$$

$$= U_0 \int dt e^{-\phi} \left[\frac{a^3(5 + \omega \kappa)}{2N} \dot{\phi}^2 - \frac{3a^2}{N} \dot{\phi} \dot{a} - \frac{12a}{N} \dot{a}^2 - \frac{4a^3}{N^2} \dot{N} \dot{\phi} \right], \quad (3.86)$$

con $U_0 = V_0/\kappa$, donde V_0 es el volumen espacial del universo observable, el cual es finito. Se sigue de la acción (3.86) que el langrangiano es

$$L = e^{-\phi} \left[\frac{a^3(5 + \omega\kappa)}{2N} \dot{\phi}^2 - \frac{3a^2}{N} \dot{\phi}\dot{a} - \frac{12a}{N} \dot{a}^2 - \frac{4a^3}{N^2} \dot{N}\dot{\phi} \right]. \quad (3.87)$$

De aquí se puede apreciar que las variables dinámicas son el factor de escala, la función lapso y el campo de Weyl. Por tanto se definen los momentos canónicos asociados a cada variable como

$$P_a = -\frac{3e^{-\phi}a}{N} \left[a\dot{\phi} + 8\dot{a} \right], \quad (3.88)$$

$$P_\phi = \frac{e^{-\phi}a^2}{N} \left[(5 + \kappa\omega) a\dot{\phi} - 3\dot{a} - \frac{4a}{N}\dot{N} \right], \quad (3.89)$$

$$P_N = -\frac{4a^3e^{-\phi}}{N^2} \dot{\phi}, \quad (3.90)$$

cabe mencionar que el momento P_N tiene una dependencia del campo de Weyl, en lugar de la función de lapso, más aún los momentos P_a y P_ϕ tienen una dependencia mixta de las variables ADM en Weyl.

Continuando con el proceso de cuantización, definimos el hamiltoniano mediante la transformación de Legendre

$$H = \dot{a}P_a + \dot{\phi}P_\phi + \dot{N}P_N - L, \quad (3.91)$$

utilizando las ecuaciones (3.87)-(3.90) se obtiene el hamiltoniano

$$H = \tilde{N} \left[\frac{Na}{2} P_a P_N + \frac{a^2}{3} P_a^2 - 4NP_N P_\phi + \frac{N^2}{2} \left(\frac{43 + 8\kappa\omega}{8} \right) P_N^2 \right], \quad (3.92)$$

donde \tilde{N} es una función auxiliar definida como $\tilde{N} = -Ne^\phi/16a^3$. Una expresión más conveniente del hamiltoniano, teniendo como finalidad un proceso de cuantización canónica, se puede obtener empleando las transformaciones canónicas

$$aP_a = P_A, \quad A = \ln a, \quad (3.93)$$

$$NP_N = P_n, \quad n = \ln N, \quad (3.94)$$

$$P_\phi = P_T, \quad T = \phi, \quad (3.95)$$

3.5. ECUACIÓN DE WHEELER-DEWITT PARA UNA TEORÍA ESCALAR-TENSORIAL

de tal forma, que al reescribir el hamiltoniano en términos de las variables A, T y n se obtiene

$$\mathcal{H} = \tilde{N} \left[\frac{1}{2} P_A P_n + \frac{1}{3} P_A^2 - 4 P_n P_T + \frac{1}{2} \Omega(T) P_n^2 \right], \quad (3.96)$$

donde hemos definido la función

$$\Omega(T) = \frac{43 + 8\kappa\omega(\phi)}{8}. \quad (3.97)$$

Ahora bien, siguiendo el proceso de cuantización canónica, promovemos las variables a operadores de la forma

$$P_A \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial A}, \quad A \rightarrow \hat{A}, \quad (3.98)$$

$$P_n \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial n}, \quad n \rightarrow \hat{n}, \quad (3.99)$$

$$P_T \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial T}, \quad T \rightarrow \hat{T}, \quad (3.100)$$

de este modo, al escribir el hamiltoniano en términos de los operadores de momentos se tiene el operador hamiltoniano

$$\hat{\mathcal{H}} = \tilde{N} \left[-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial A \partial n} - \frac{\hbar^2}{3} \frac{\partial^2}{\partial A} + 4\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial n \partial T} - \frac{\hbar^2 \Omega(T)}{2} \frac{\partial^2}{\partial n^2} \right]. \quad (3.101)$$

Finalmente, al aplicar el operador hamiltoniano a la función de onda $\psi(T, A, n)$ obtenemos la ecuación de Wheeler-DeWitt

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial A \partial n} - \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial A^2} + 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial n \partial T} - \frac{\Omega(T)}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} = 0. \quad (3.102)$$

Se sigue de esta ecuación que existe un acoplamiento entre la coordenada temporal con las espaciales. Esto se debe a que el campo de Weyl es un campo geométrico y no un campo físico.

El problema se origina en el hecho de que el elemento diferencial de línea $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ no es invariante bajo el grupo de Weyl

$$d\bar{s}^2 = e^f ds^2. \quad (3.103)$$

Una manera de construir un elemento diferencial de línea invariante es mediante la introducción de la métrica efectiva

$$h_{\alpha\beta} = e^{-\phi} g_{\alpha\beta}. \quad (3.104)$$

De esta forma se obtiene un elemento diferencial de línea invariante

$$d\bar{s}^2 = \bar{h}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = ds^2. \quad (3.105)$$

La ecuación de compatibilidad Weyliana en términos de la métrica efectiva se escribe

$$\nabla_\mu h_{\alpha\beta} = \nabla_\mu \left(e^{-\phi} g_{\alpha\beta} \right) = 0. \quad (3.106)$$

Así, para el caso de la métrica (3.104) se tiene un tipo particular de geometría de Weyl-Integrable, el cual cumple con la condición de compatibilidad de una geometría Riemanniana. Por tanto tiene sentido pensar en esta geometría como una geometría Riemanniana efectiva. Además de la ecuación (3.106) se sigue que el campo ϕ dejó de ser parte de la estructura afín, puesto que los símbolos de conexión para una geometría Riemanniana son los símbolos de Christoffel, los cuales solo tienen información de la métrica. Esto produce una transición para el campo ϕ de ser un campo geométrico a un campo físico.

Por otro parte, al escribir la acción (3.79) en términos de la métrica efectiva $h_{\alpha\beta}$ se obtiene

$$S = \int d^4x \sqrt{-h} \left[\frac{{}^{(4)}R(h)}{16\pi G} + \frac{1}{2} \tilde{\omega}(\phi) h^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} \right]. \quad (3.107)$$

Es importante notar que esta acción aun está escrita sobre una variedad \mathcal{M} tipo espacio-tiempo. Sin embargo para reescribir la acción sobre una variedad $\mathbb{R} \times \Sigma$ tipo espacio y tiempo, basta con usar el formalismo ADM usual, puesto que la geometría de fondo es Riemann efectiva.

De esta forma al hacer las consideraciones de que el campo $\phi = \phi(t)$ y que la métrica considerada es la de FLRW (3.81), la acción (3.107) se transforma en

$$S = -\frac{1}{8\pi G} \int d^3x dt \left[\frac{6a}{N} \dot{a}^2 + \frac{\tilde{\omega}(\phi) a^3}{2N} \dot{\phi}^2 \right], \quad (3.108)$$

3.5. ECUACIÓN DE WHEELER-DEWITT PARA UNA TEORÍA ESCALAR-TENSORIAL

con $\tilde{\omega} = -8\pi G\omega$. Integrando con respecto a la parte espacial se obtiene

$$S = U_0 \int dt \left[\frac{6\dot{a}^2 a}{N} + \frac{\tilde{\omega}(\phi)a^3}{2N} \dot{\phi}^2 \right], \quad (3.109)$$

donde $U_0 = -V_0/8\pi G$, con V_0 el volumen espacial del universo observable. De la acción (3.109) se tiene que el lagrangiano es

$$L = \frac{6a^2}{N} \dot{a}^2 + \frac{\tilde{\omega}(\phi)a^3}{2N} \dot{\phi}^2. \quad (3.110)$$

Como las únicas variables que aportan dinámica son el factor de escala y el campo de Weyl, en este caso solo tenemos dos momentos canónicos asociados, a saber

$$P_a = \frac{12a}{N} \dot{a}, \quad (3.111)$$

$$P_\phi = \frac{\tilde{\omega}(\phi)a^3}{N} \dot{\phi}. \quad (3.112)$$

De este modo, al hacer la transformación de Legendre tenemos como resultado el hamiltoniano

$$H = \frac{N}{24a} P_a^2 + \frac{N}{2\tilde{\omega}(\phi)a^3} P_\phi^2. \quad (3.113)$$

Con la finalidad de implementar una cuantización canónica, introducimos las transformaciones canónicas [29]

$$aP_a = P_A, \quad A = \ln a, \quad (3.114)$$

$$P_T = \frac{P_\phi^2}{2}, \quad T = \frac{\phi}{P_\phi}. \quad (3.115)$$

Escribiendo la ecuación (3.113) en términos de los momentos P_A, P_T se obtiene el hamiltoniano

$$H = \frac{N}{24a^3} P_A^2 + \frac{N}{\Omega(T)a^3} P_T, \quad (3.116)$$

donde $\Omega(T) = \tilde{\omega}(T, P_\phi)$.

Siguiendo con el proceso de cuantización canónica, promovemos los momentos como los operadores

$$P_A \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial A}, \quad (3.117)$$

$$P_T \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial T}. \quad (3.118)$$

Por consiguiente, se tiene el operador hamiltoniano

$$\hat{H} = \tilde{N} \left[-\frac{\hbar^2}{48} \frac{\partial^2}{\partial A^2} - \frac{i\hbar}{\Omega(T)} \frac{\partial}{\partial T} \right], \quad (3.119)$$

con $\tilde{N} = 2N/a^3$. Finalmente la ecuación Wheeler-DeWitt $\hat{H}\Psi(A, T) = 0$, para nuestra teoría tiene la forma

$$-\frac{\hbar^2}{48} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial A^2} = \frac{i\hbar}{\Omega(T)} \frac{\partial \Psi}{\partial T}. \quad (3.120)$$

Comparando la ecuación de Wheeler-DeWitt con la ecuación de Schrödinger $\hat{H}\Psi = i\hbar(\partial\Psi/\partial T)$, se puede concluir que T corresponde a la variable temporal.

Cabe mencionar que la función de onda $\Psi(A, T)$ forma un espacio de Hilbert con el producto interno dado por

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dA \Psi_1 \Psi_2^*, \quad (3.121)$$

donde el asterisco denota el complejo conjugado de la función ψ . Además la función de onda satisface la condición de Dirichlet $\Psi(A \rightarrow \pm\infty) = 0$ o la condición de Neumann $[\partial\Psi/\partial A](A \rightarrow \pm\infty) = 0$.

Con el fin de dar solución a la ecuación de Wheeler-DeWitt, usamos el método de separación de variables, proponiendo que la función de onda puede escribirse como

$$\Psi(A, T) = \Theta(A)R(T). \quad (3.122)$$

En consecuencia la ecuación (3.120) produce el sistema de ecuaciones

$$\frac{d^2\Theta}{dA^2} + \frac{48E}{\hbar^2}\Theta = 0, \quad (3.123)$$

$$\frac{dR}{dT} + \frac{iE}{\hbar}\Omega(T)R = 0, \quad (3.124)$$

3.6. PROPUESTA DE CUANTIZACIÓN PARA UNA GEOMETRÍA DE WEYL-INTEGRABLE

con E siendo una constante de separación. Las soluciones de las ecuaciones (3.123) y (3.124) son respectivamente

$$\Theta(A) = \Theta_0 \exp(ikA), \quad (3.125)$$

$$R(T) = R_0 \exp\left(\frac{-iE}{\hbar} \int_0^T \Omega(T) dT\right), \quad (3.126)$$

donde hemos usado las condiciones iniciales $\Theta(0) = \Theta_0$ y $R(0) = R_0$. Es importante destacar que si ω es constante entonces $R(T)$ se reduce a

$$R(T) = R_0 \exp\left(\frac{-iE\Omega_0}{\hbar} T\right). \quad (3.127)$$

Finalmente, de manera general se tiene la solución

$$\Psi(A, T) = \frac{1}{\sqrt{A_0}} \exp(ikA) \exp\left(\frac{-iE}{\hbar} \int_0^T \Omega(T) dT\right). \quad (3.128)$$

con A_0 una constante de normalización. La ecuación (3.128) representa la función de onda que describe el Universo en una teoría escalar-tensorial de la gravedad en una geometría de Riemann efectiva.

Así, hemos visto como la métrica se cuantiza mediante la cuantización de las variables ADM en un geometría de fondo Riemann efectiva. Sin embargo, para el caso de una geometría de fondo del tipo Weyl-integrable, lo más natural sería que si la métrica es cuantizada entonces el campo escalar de Weyl también debería estarlo. En ese sentido tendríamos una geometría de Weyl-Integrable cuantizada. En la siguiente sección cuantizaremos la geometría de Weyl-Integrable a partir de la condición de no metricidad.

3.6. Propuesta de cuantización para una geometría de Weyl-Integrable

Como vimos en el capítulo 1, lo que describe en esencia a una geometría son la existencia o ausencia de la torsión y la ecuación de compatibilidad entre la métrica $g_{\alpha\beta}$ y la conexión ∇ . Recordemos que la geometría de Weyl-Integrable es una geometría que no tiene torsión y es descrita por

una ecuación de no metricidad. Es en este sentido, que la forma en la que procederemos a cuantizar la geometría de Weyl-Integrable, será mediante la cuantización de la condición de no metricidad.

Para una no-metricidad arbitraria la condición de compatibilidad entre la métrica y la conexión es dada por

$$\nabla_{\mu}g_{\alpha\beta} = N_{\mu\alpha\beta}, \quad (3.129)$$

donde ∇_{μ} denota la derivada covariante de Weyl y $N_{\mu\alpha\beta}$ se conoce como tensor de no-metricidad, el cual para una geometría de Weyl-integrable tiene la forma

$$N_{\mu\alpha\beta} = \varphi_{,\mu}g_{\alpha\beta}. \quad (3.130)$$

Ahora bien, siguiendo con los postulados de mecánica cuántica asumimos que el operador de no-metricidad satisface la ecuación de valores propios

$$\hat{N}_{\mu\alpha\beta} \psi^{\mu\alpha\beta} = N_{\mu\alpha\beta} \psi^{\mu\alpha\beta}, \quad (3.131)$$

donde hemos introducido una función de onda tensorial $\psi^{\mu\alpha\beta}$, la cual satisface la condición

$$\int d\varphi \psi^{\alpha\mu\nu} \psi^{\lambda\beta\gamma *} = \delta^{\alpha\lambda} \delta^{\mu\beta} \delta^{\nu\gamma}. \quad (3.132)$$

Por otro lado con la finalidad de obtener el operador de no metricidad, de la ecuación (3.112) se obtiene la relación

$$\dot{\varphi} = \frac{N}{\tilde{\omega}a^3} P_{\varphi}. \quad (3.133)$$

Empleando (3.133) en la ecuación (3.130) las componentes no nulas del tensor de no-metricidad son

$$N_{000} = \frac{N^3}{\tilde{\omega}a^3} P_{\varphi}, \quad (3.134)$$

$$N_{0ij} = -\frac{N}{\tilde{\omega}a} \delta_{ij} P_{\varphi}, \quad (3.135)$$

donde hemos usado la métrica $ds^2 = N^2(t)dt^2 - a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j$. Continuando con el proceso de cuantización canónica, promovemos las ecuaciones

3.6. PROPUESTA DE CUANTIZACIÓN PARA UNA GEOMETRÍA DE WEYL-INTEG

(3.134) y (3.135) en su forma operatorial

$$\hat{N}_{000} = -\frac{i\hbar N^3}{\tilde{\omega}a^3} \frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad (3.136)$$

$$\hat{N}_{0ij} = \frac{i\hbar N}{\tilde{\omega}a} \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad (3.137)$$

donde hemos definido el operador de momento como $\hat{P}_\varphi = -i\hbar\partial/\partial\varphi$. De esta manera al sustituir en la ecuación de valores propios (3.131) se obtiene el sistema de ecuaciones

$$-\frac{i\hbar N s}{\tilde{\omega}a^3} \frac{\partial}{\partial\varphi} \psi^{000} = N_{000} \psi^{000}, \quad (3.138)$$

$$\frac{i\hbar N}{\tilde{\omega}a} \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial\varphi} \psi^{0ij} = N_{0ij} \psi^{0ij}. \quad (3.139)$$

Las soluciones de (3.138) y (3.139) son respectivamente

$$\psi^{000} = \psi_0^{000} \exp \left[\frac{i\tilde{\omega}a^3}{\hbar N^3} N_{000} (\varphi - \varphi_0) \right], \quad (3.140)$$

$$\psi^{0ij} = \psi_0^{0ij} \exp \left[-\frac{i\tilde{\omega}a}{\hbar N} \delta^{km} N_{0km} (\varphi - \varphi_0) \right], \quad (3.141)$$

donde hemos usado las condiciones iniciales para los componentes de la función de onda tensorial $\psi^{000}(\varphi_0) = \psi_0^{000}$ y $\psi^{0ij}(\varphi_0) = \psi_0^{0ij}$.

De esta manera la función de onda se puede escribir

$$\psi = A_{000} \psi^{000} + A_{0ij} \psi^{0ij}. \quad (3.142)$$

donde A_{000} y A_{0ij} son constantes de normalización. Finalmente, con ayuda de la ecuación (3.132) podemos obtener la función de onda normalizada, la cual está dada por

$$\psi = \frac{\psi_0^{000}}{\sqrt{\varphi_0}} \exp \left[\frac{i\tilde{\omega}a^3}{\hbar N^3} N_{000} (\varphi - \varphi_0) \right] + \frac{\psi_0^{0ij} \delta_{ij}}{\sqrt{\varphi_0}} \exp \left[-\frac{i\tilde{\omega}a}{\hbar N} N_{0km} \delta^{km} (\varphi - \varphi_0) \right]. \quad (3.143)$$

Una vez obtenida la función de onda, es posible calcular el valor de expectación del campo escalar de Weyl, el cual tiene la forma

$$\langle \varphi \rangle = \langle \psi | \varphi | \psi \rangle = \int_0^{\varphi_0} d\varphi \psi \varphi \psi^* = 2\varphi_0, \quad (3.144)$$

esta última ecuación implica que el campo escalar cuántico de Weyl debe tener contribuciones a escala clásica.

De esta manera, si pensamos por ejemplo en un escenario de pre-inflación en el universo temprano, podemos decir que el campo escalar durante pre-inflación aparece como el promedio de un campo geométrico cuántico. Así, aunque en modelos inflacionarios y pre-inflacionarios relativistas el campo escalar inflatón no tiene un origen, si consideramos una teoría escalar-tensorial de norma en una geometría de fondo de Weyl-integrable cuántica, el campo inflatón tiene un origen cuántico-geométrico.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo de tesis hemos estudiado algunas maneras de introducir una geometría cuántica aleatoria. Comenzamos considerando que los vectores tangentes a las curvas en una variedad diferenciable son operadores de momento lineal y partir de esa suposición obtenemos que se satisface un principio de incertidumbre relativista. Se dice relativista pues a diferencia del principio de incertidumbre de la mecánica cuántica aparece una dependencia en la cuadrivelocidad asociada a la clase de observadores que miden los fenómenos cuánticos estudiados.

En base al formalismo anterior construimos un operador asociado al tensor métrico que es función de la longitud de Planck y como consecuencia obtuvimos el operador elemento diferencial de línea. Sin embargo, encontramos que usando el formalismo de matrices aleatorias siempre es necesario dar a priori la distribución de probabilidad asociada a cada una de las variables aleatorias involucradas en la métrica. Pero, consideramos que tal distribución debe ser determinada por las condiciones físicas del problema y no debe ser introducida a priori. Así, aún falta una ecuación que determine tal distribución de probabilidad. En el ámbito de la física cuántica diremos que era necesaria una ecuación para determinar la función de onda. La ecuación de Wheeler-DeWitt fue nuestra primera opción.

Así, obtuvimos la ecuación de Wheeler-Dewitt para una teoría escalar-tensorial de la gravedad en el frame de Weyl, en donde usamos una exten-

sión del formalismo ADM en una geometría de Weyl-Integrable. Mostramos que en el frame de Weyl, a diferencia de la forma tradicional en una geometría Riemanniana, la ecuación de Wheeler-DeWitt presenta una mezcla de las contribuciones de las derivadas en coordenadas espaciales con la temporal.

Sin embargo, cuando escribimos nuestro formalismo en términos de una métrica invariante bajo el grupo de transformaciones de Weyl, es posible desacoplar las coordenadas espaciales con la temporal. Esto se debe a que la geometría de fondo asociada a la acción de la teoría escrita en términos de la métrica invariante resulta ser Riemanniana. Para este último caso obtuvimos la función de onda asociada al universo pues consideramos una métrica del tipo FLRW.

En este punto es importante resaltar que la ecuación de Wheeler-DeWitt obtenida en el frame de Weyl corresponde a una ecuación de Schrödinger no-lineal. Por ese motivo es factible encontrar una función de onda para ese caso utilizando técnicas de mecánica cuántica no-lineal.

Por último, si a través de la ecuación de Wheeler-DeWitt estamos cuantizando una teoría de gravitación escalar-tensorial de norma, entonces resulta natural pensar que la geometría de fondo asociada a esta teoría también debería ser cuantizada para tener un formalismo auto-consistente. Siguiendo esa línea de pensamiento propusimos una nueva forma de cuantizar una geometría de Weyl-Integrable, mediante su condición de no metricidad. Con este fin, hemos definido un operador de no metricidad $\hat{N}_{\mu\nu\alpha}$ y hemos introducido una función de onda auxiliar de carácter tensorial $\psi^{\mu\nu\alpha}$, donde la función de onda sería $\psi = \sum_{\mu,\nu,\alpha} A_{\mu\nu\alpha} \psi^{\mu\nu\alpha}$, siendo $A_{\mu\nu\alpha}$ constantes de normalización.

Una vez cuantizada la geometría de Weyl-Integrable se calculó el valor de expectación del campo cuántico de Weyl y obtuvimos que el campo cuántico de Weyl tiene aportaciones a escala clásica. De aquí que como un posible trabajo a futuro, si consideramos que cerca del tiempo de Planck la geometría era de Weyl-Integrable y estaba cuantizada, entonces podemos pensar en la posibilidad de dar un origen geométrico al campo escalar que

dió origen a un escenario pre-inflacionario y posteriormente inflacionario en el universo temprano. El origen de este campo escalar conocido como inflatón, aun es un problema abierto en la cosmología moderna, y con nuestro formalismo podríamos abordarlo.

Bibliografía

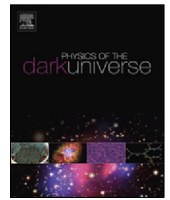
Bibliografía

- [1] LIBOFF, R. L. (2003). *Introductory quantum mechanics*. Pearson Education India.
- [2] ROVELLI, C., & VIDOTTO, F. (2015). *Covariant loop quantum gravity: an elementary introduction to quantum gravity and spinfoam theory*. Cambridge University Press.
- [3] WHEELER, J. A. (1968). *Relativity, Groups and Topology*, eds. CM De Witt and JA Wheeler.
- [4] DEWITT, B. S. (1967). *Quantum theory of gravity. I. The canonical theory*. Physical Review, 160(5), 1113.
- [5] DEWITT, B. S. (1967). *Quantum theory of gravity. II. The manifestly covariant theory*. Physical Review, 162(5), 1195.
- [6] GOURGOULHON, E. (2012). *3+ 1 formalism in general relativity: bases of numerical relativity* (Vol. 846). Springer Science & Business Media.
- [7] ARNOWITT, R., DESER, S., & MISNER, C. W. (2008). *Republication of: The dynamics of general relativity*. General Relativity and Gravitation, 40(9),
- [8] MONTES, M., AGUILAR, J. E. M., & GRANADOS, V. (2019). *Gravitoelectromagnetic inflation and seeds of cosmic magnetic fields from geometrical Weyl-invariant scalar-tensor theory of gravity*. Canadian Journal of Physics, 97(5), 517-523.

- [9] PUCHEU, M. L., ROMERO, C., BELLINI, M., & AGUILAR, J. E. M. (2016). *Gauge invariant fluctuations of the metric during inflation from a new scalar-tensor Weyl-integrable gravity model*. Physical Review D, 94(6), 064075.
- [10] ALMEIDA, T. S., PUCHEU, M. L., ROMERO, C., & FORMIGA, J. B. (2014). *From Brans-Dicke gravity to a geometrical scalar-tensor theory*. Physical Review D, 89(6), 064047.
- [11] DYSON, F. J. (1962). *A Brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix*. Journal of Mathematical Physics, 3(6), 1191-1198.
- [12] WIGNER E. P. (1959) *Conference on Neutron Physics Tennessee*, Lab. Rept. ORNL-2309 P67.
- [13] PORTER, C. E. (1965). *Statistical theories of spectra: fluctuations* (No. 530.15 P6).
- [14] RIEMANN, B. (1854). *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*. Königliche Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augustus-Universität Göttingen, 13(133), 1867.
- [15] BOOTHBY, W. M. (1986). *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*. Academic press.
- [16] PERDOMO, O. M. (2008). *Sobre el nacimiento de la Geometría Riemanniana*. Tumbaga, 1(3), 157-173.
- [17] DO CARMO, M. P. (1992). *Riemannian geometry*. Birkhäuser.
- [18] SANOMIYA, T. A. T., LOBO, I., FORMIGA, J. B., & ROMERO, C. (2020). *Weyl's unified field theory: perspectives for a new approach*. International Journal of Modern Physics A, 35(02n03), 2040005.
- [19] RYDER, L. H. (1996). *Quantum field theory*. Cambridge university press.
- [20] HARTLE, J. B., & HAWKING, S. W. (1983). *Wave function of the universe*. In EUCLIDEAN QUANTUM GRAVITY (pp. 310-325).

- [21] LINDE, A. (1990). *Particle physics and inflationary cosmology* (Vol. 5). CRC press.
- [22] LIVAN, G., NOVAES, M., & VIVO, P. (2018). *Introduction to random matrices: theory and practice* (Vol. 26). Springer.
- [23] WALD, R. M. (2010). *General relativity*. University of Chicago press.
- [24] GEROCH, R. (1970). *Domain of dependence*. Journal of Mathematical Physics, 11(2), 437-449.
- [25] HAWKING, S. W., & ELLIS, G. F. R. (1973). *The large scale structure of space-time* (Vol. 1). Cambridge university press.
- [26] LU, T. T., & SHIOU, S. H. *Inverses of 2×2 block matrices*. Computers & Mathematics with Applications, 43(1-2), 119-129. (2002).
- [27] POWELL, P. D. (2011). *Calculating determinants of block matrices*. arXiv preprint arXiv:1112.4379.
- [28] BARRETO, A. B., ALMEIDA, T. S., & ROMERO, C. (2015, March). *Extending the ADM formalism to Weyl geometry*. In AIP Conference Proceedings (Vol. 1647, No. 1, pp. 89-93). American Institute of Physics.
- [29] ALVES-JUNIOR, F. A. P., PUCHEU, M. L., BARRETO, A. B., & ROMERO, C. (2018). *Quantum cosmology in an anisotropic n-dimensional universe*. Physical Review D, 97(4), 044007.
- [30] ROBERTSON, H. P. (1929). *The uncertainty*. Physical Review, 34(1), 163.

Anexos



Higgs inflation in complex geometrical scalar-tensor theory of gravity

José Edgar Madriz Aguilar^{a,*}, J. Zamarripa^b, M. Montes^a, C. Romero^c

^a Departamento de Matemáticas, Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI), Universidad de Guadalajara (UdG), Av. Revolución 1500 S.R. 44430, Guadalajara, Jalisco, Mexico

^b Centro Universitario de los Valles, Carretera Guadalajara-Ameca Km 45.5, C. P. 46600, Ameca, Jalisco, Mexico

^c Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, Caixa Postal 5008, 58059-970, João Pessoa, PB, Brazil

ARTICLE INFO

Article history:

Received 23 August 2019

Received in revised form 26 October 2019

Accepted 21 January 2020

Keywords:

Weyl-integrable geometry
Geometrical scalar-tensor gravity
Higgs cosmological inflation

ABSTRACT

We derive a Higgs inflationary model in the context of a complex geometrical scalar-tensor theory of gravity. In this model the Higgs inflaton scalar field has geometrical origin playing the role of the Weyl scalar field in the original non-riemannian background geometry. The energy scale enough to generate inflation from the Higgs energy scale is achieved due to the compatibility of the theory with its background complex Weyl-integrable geometry. We found that for a number of e-foldings $N = 63$, a nearly scale invariant spectrum for the inflaton is obtained with a spectral index $n_s \simeq 0.9735$ and a scalar to tensor ratio $r \simeq 0.01$, which are in agreement with Planck observational data.

© 2020 Published by Elsevier B.V.

1. Introduction

Inflationary models represent a cornerstone of modern cosmology. By postulating the existence of the inflaton scalar field, inflation solves the old problems of the big bang cosmology and also provides a mechanism to explain the formation of cosmological structure. In this theory the inflaton must be capable to generate the enough vacuum energy density to have a suitable model compatible with CMB observational data and the matter distribution in the universe. In the literature we can find different inflationary models that use more than one scalar field, as for example the hybrid inflation models [1–4].

However, until now, the only scalar particle that has experimental evidence of his existence is the Higgs boson [5,6]. The idea that the inflaton field might be the same as the Higgs scalar field has already been considered [7]. The main problem of this idea relies in the fact that the energy scale of the Higgs field is too small to generate the enough quantity of inflation required to solve the problems of the big bang cosmology. In particular, to have the enough inflation to solve the big bang problems, the inflaton is estimated to have a mass $\sim 10^{13}$ GeV, and in some models it prefers a small-interacting quartic coupling constant $\lambda \leq 10^{-9}$ [7–9]. However, all the parameters associated with the Higgs field are determined at TeV scale, such as the dimensionless Higgs quartic coupling $0.11 < \lambda < 0.27$ [9,10]. Models attempting to solve this problem have already appeared in the literature,

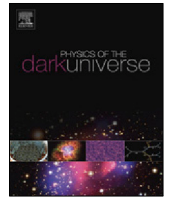
which in much are non-minimal coupling models [11–14]. In addition, recently there has been a lot of interest in the Higgs inflationary models in the Palatini formulation, where a Palatini variational principle is implemented on an Einstein–Hilbert form of the action. More about these models can be found for example in [15–19].

On the other hand, scalar-tensor theories incorporate a scalar field in the action. However, for some researchers it is not so clear if the scalar field describes gravity or matter [20]. This happens in the so called Jordan frame. By means of a conformal transformation of the metric appears the Einstein frame. In the Jordan frame gravity exhibits a non-minimal coupling with the scalar field while in the Einstein frame it is obtained a minimal coupling [21]. The main controversy relies in determine which of the both frames is the physical one. In the literature we can find opinions in favour of one or the other [20]. However, on the other hand, it is a well-known fact that a geometry is characterized by the compatibility condition between the connection and the metric: $\nabla_{\mu} g_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta\mu}$. However, in general the compatibility condition does not remain invariant only under conformal transformations of the metric. Therefore, the usual manner in which we can pass from the Jordan to Einstein frame in standard scalar-tensor theories, changes the background geometry, and this is why the physics in one or another frame can be different. In particular geodesic observers in one frame are not in the other [20,22,23].

This controversy can be alleviated if the background geometry is not fixed *a priori* as Riemannian. This is the main idea in a recently introduced new kind of scalar-tensor theories known as geometrical scalar-tensor theories of gravity [22,23]. In this theories the background geometry is obtained via the Palatini variational principle. The resulting geometry is one of the Weyl-integrable type [22,23]. As a consequence, the scalar field that

* Corresponding author.

E-mail addresses: madriz@mdp.edu.ar, jose.madriz@academicos.udg.mx (J.E. Madriz Aguilar), zama_92@live.com.mx (J. Zamarripa), mariana.montes@academicos.udg.mx (M. Montes), cromero@fisica.ufpb.br (C. Romero).



Scalar field unification of interacting viscous dark fluid from a geometrical scalar–tensor theory of gravity

José Edgar Madriz Aguilar^{a,*}, A. Gil-Ocaranza^b, M. Montes^a, J. Zamarripa^b

^a Departamento de Matemáticas, Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI), Universidad de Guadalajara (UdG), Av. Revolución 1500 S.R. 44430, Guadalajara, Jalisco, Mexico

^b Centro Universitario de los Valles Carretera Guadalajara-Ameca Km. 45.5, C.P. 46600, Ameca, Jalisco, Mexico

ARTICLE INFO

Article history:

Received 20 July 2020

Accepted 11 August 2020

Keywords:

Weyl-Integrable geometry

Scalar–tensor gravity

Viscous interacting dark fluid

Accelerated cosmic expansion

Dark energy and dark matter

ABSTRACT

We investigate, in the framework of a recently introduced new class of invariant geometrical scalar–tensor theory of gravity, the possibility that a viscous dark fluid can be described in a unified manner by a single scalar field. Thus we developed a model in which both the metric tensor and the scalar field have geometrical origin. The scalar field is characterized by a non-canonical kinetic term and the scalar viscosity of the dark fluid appears as soon the kinetic energy of the scalar field is no longer canonical. The scalar viscosity is considered as a function of the Hubble and the deceleration parameters. To illustrate the formalism we have considered two cases: a constant and a thermodynamic equation of state parameters. In the both cases we obtain analytic representations for the scalar field and their respective potentials. We delimit free parameters by comparing with some Planck 2018 results.

© 2020 Published by Elsevier B.V.

1. Introduction

An explanation for the acceleration in the cosmic expansion continues being a challenge in modern cosmology [1]. Such acceleration has been corroborated by Ia Supernovae data [2,3], baryonic acoustic oscillations (BAO) [4] and Cosmic Microwave Background (CMB) anisotropies [5–7]. In the quest for an explanation of the origin of such acceleration the main proposals are divided in modified theories of gravity and dark energy models [8,9]. In the second branch we can find models in which the dark energy is considered as a fluid with viscosity where thermodynamic effects are also important [1,10–18]. Dark energy models treated as imperfect fluids can be considered more realistic [19]. In fact, one characteristic of dark energy models with perfect fluids is that as the dark energy component has negative pressure, the matter component has null pressure and the radiation pressure is $\rho_r/3$, the total pressure is negative and in this sense the material content of the universe violate the strong energy condition [20]. In addition, some observational data suggest that the dark energy equation of state could be time varying, and thus a perfect fluid prescription can suffer of some thermodynamic problems linked to the positiveness of the entropy and temperature [20–22]. Viscous dark energy models can avoid that kind of problems.

However, parallel to dark energy models, modified theories of gravity have been a recourse to explain the present cosmological scenario of accelerating expansion, as for example, scalar–tensor theories of gravity [23,24], $f(R)$ theories [25,26] and theories with extra dimensions [27,28], among others. Recently a new approach of scalar–tensor theories of gravity has been proposed. This new approach is known as geometrical scalar–tensor theories of gravity [29,30]. One of the main motivations for these theories is to avoid the controversy on which of the Einstein or Jordan frames is the physical one. The controversy is related to the fact that the way of passing from one frame to the other changes the background geometry and makes that geodesic observers in one frame are not in the other. In that approach the symmetries of the action and of the background geometry i.e. the compatibility condition, are the same, and thus the scalar field becomes part of the affine structure of the space–time manifold. In this sense, both the metric and the scalar field are geometric in nature and hence the controversy can be alleviated [29–31]. In geometrical scalar–tensor theories the background geometry is not fixed a priori instead it is determined by the Palatini's principle [29,30]. Different applications of these theories have been done. For example, inflationary cosmology [32,33], quintessence, cosmic magnetic fields, and some cosmological models have been studied topics of these theories [34–36].


In this letter our interest is to derive a viscous dark fluid cosmological model in the setting of geometrical scalar–tensor theories of gravity, which can be described in a unified manner by a single scalar field of geometrical origin. In this derivation we

* Corresponding author.

E-mail addresses: madriz@mdp.edu.ar, jose.madriz@academicos.udg.mx (J.E. Madriz Aguilar), victor.gil9008@alumnos.udg.mx (A. Gil-Ocaranza), mariana.montes@academicos.udg.mx (M. Montes), jose.zamarripa@academicos.udg.mx (J. Zamarripa).



Extending $\Lambda(t)$ -CDM to the inflationary epoch using dynamical foliations and a pre-inflationary vacuum energy from 5D geometrical vacuum as a unifying mechanism

José Edgar Madriz Aguilar^{1,a} , J. Zamarripa^{2,b}, M. Montes^{1,c}, J. A. Licea^{1,d},
C. De Loza^{2,e}, A. Peraza^{3,f}

¹ Departamento de Matemáticas, Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI), Universidad de Guadalajara (UdG), Av. Revolución 1500, S.R. 44430 Guadalajara, Jalisco, México

² Centro Universitario de los Valles, Carretera Guadalajara-Ameca Km 45.5, C. P. 46600 Ameca, Jalisco, México

³ Departamento de Física, Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI), Universidad de Guadalajara, Av. Revolución 1500, S. R. 44430 Guadalajara, Jalisco, México

Received: 30 August 2021 / Accepted: 4 November 2021

© The Author(s), under exclusive licence to Società Italiana di Fisica and Springer-Verlag GmbH Germany, part of Springer Nature 2022

Abstract In this paper assuming a 5D quantum pre-inflationary vacuum energy, we propose a manner to extend some $\Lambda(t)$ -CDM models to the inflationary period by using dynamical foliations of the five-dimensional (5D) Ricci-flat space-time manifold, regarding a non-compact extra space-like coordinate. In this formalism, we achieve also a geometrical unification of inflation and the present accelerating epoch. In this approach, inflation is generated by a pre-inflationary quantum vacuum energy that maintains the 5D classical vacuum on cosmological scales. We obtain from geometrical conditions that we can model the presence of the pre-inflationary vacuum energy in 4D as a dynamical cosmological constant. In this model, the 4D inflationary period is governed by a power law expansion and for certain values of some parameters of the model, we obtain an spectral index satisfying $0.9607 \leq n_s \leq 0.9691$ and a scalar-to-tensor ratio $r = 0.098$, values that fit well according to Planck 2018 results. The 4D inflationary potential is induced for the 5D geometry and the 4D pre-inflationary potential is determined by the model and its contribution is necessary so that n_s and r can fit the observational data. We also show that in this theoretical framework, the present acceleration in the expansion of the universe can be explained due to a remanent of this pre-inflationary vacuum energy scaled to the present epoch and that its description can be done with the same $\Lambda(t)$. In this period, we obtain a deceleration parameter in agreement with Planck 2018 data under certain restrictions of the parameters of the model. From the geometrical point of view, $\Lambda(t)$ is depending on the dynamical foliation of the 5D space-time manifold.

^a e-mails: madriz@mdp.edu.ar; jose.madriz@academicos.udg.mx (corresponding author)

^b e-mail: jose.zamarripa@academicos.udg.mx

^c e-mail: mariana.montes@academicos.udg.mx

^d e-mail: antonio.licea@academicos.udg.mx

^e e-mail: cynthia.delozas2536@alumnos.udg.mx

^f e-mail: americo.peraza@academicos.udg.mx



**UNIVERSIDADE
FEDERAL
DA PARAÍBA**

Departamento de Física

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Caixa Postal 5008

CEP : 58059-970 – João Pessoa - PB - Brasil

Fone: (083) 3216-7435

Fax : (083) 3216-7542

José Carlos Zamarripa Rodríguez
University of Guadalajara
Guadalaja – Mexico

João Pessoa, 7 October 2019

Dear Mr. Rodríguez,

This is to thank you for your visit to our Department of Physics, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, Brazil, thus giving continuity to our scientific collaboration. We also thank you for giving a seminar to our group with the title of *Inducing a dynamical cosmological constant from 5D Wesson's Induced Matter Theory*.

I'm looking forward to seeing you again in João Pessoa

Yours sincerely,

Carlos Romero

Prof. Carlos Romero
Director of the Gravitation and Cosmology Group



UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

El Centro Universitario de los Valles

extiende la presente

CONSTANCIA

o

Mtro. José Carlos Zamarripa Rodríguez

Por su participación como ponente "Energía oscura", en el 2^{do} Encuentro de Cuerpos Académicos en Ciencias e Ingenierías, Organizado por los C.A y Posgrados de la División de Estudios Científicos y Tecnológicos del Centro Universitario de los Valles de la Universidad de Guadalajara, llevado a cabo los días 03 y 04 de diciembre de 2020.

A T E N T A M E N T E

"Piensa y Trabaja"

"Año de la Transición Energética en la Universidad de Guadalajara"

Ameca, Jalisco a 03 de diciembre de 2020

Dr. José Guadalupe Rosas Elguera
Director de División

Dr. José Guadalupe Salazar Estrada
Secretario Académico