

---

---

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

CENTRO UNIVERSITARIO DE LOS VALLES

---

---



---

---

**ENERGÍA OSCURA ACOPLADA CON MATERIA  
OSCURA EN UN FLUIDO COSMOLÓGICO  
NO-CANÓNICO**

---

---

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS CON  
ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS**

**P R E S E N T A**

**M. C. VICTOR ALEJANDRO GIL OCARANZA**

Director: Dr. José Edgar Madriz Aguilar

---

---

Verano 2021

## **AGRADECIMIENTOS**

Quiero agradecer especialmente a mi tutor y director de tesis, el Dr. José Edgar Madriz Aguilar por la confianza y oportunidad de realizar mi doctorado bajo su dirección, por su tiempo y paciencia durante el trabajo de investigación; durante el cual, además del conocimiento, me ha enseñado que aún falta mucho por aprender y que esto apenas es el inicio.

Quiero agradecer también a la Dra. Mariana Sarahí Montes Navarro por sus valiosos comentarios, críticas y consejos durante el seguimiento de la investigación y redacción de esta tesis.

A mi madre, Matilde Ocaranza Zárate, por su apoyo y cariño incondicional. A Miriam Ponce Galarza, por su compañía, apoyo y paciencia durante todo este tiempo.

Y desde hace muchos años, a mi maestro y amigo Mtro. Carlos Caravantes Soto, por inculcarme el interés en la ciencia y por su apoyo desinteresado en muchos aspectos de mi vida.

Por último, agradecer a los coordinadores del posgrado de los cuales siempre recibí apoyo y trato cordial, y al Centro Universitario de los Valles por permitirme realizar mis estudios.

A todos, gracias.

Victor Alejandro Gil Ocaranza

# ÍNDICE

<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>I Elementos de gravitación</b>	<b>8</b>
1.1 Introducción a la teoría de la relatividad especial . . . . .	8
1.2 Principio variacional de Palatini y las ecuaciones de Einstein . . . . .	16
1.3 Principio variacional de Palatini . . . . .	21
1.4 Geometría de Weyl . . . . .	23
1.5 Geometría de Weyl-Integrable . . . . .	24
1.6 Teoría escalar-tensorial de Brans-Dicke . . . . .	26
1.7 Teoría escalar-tensorial generalizada . . . . .	27
1.8 Teoría de Gravedad inducida . . . . .	28
<b>II El modelo cosmológico estándar</b>	<b>30</b>
2.1 Ecuaciones de Friedmann con $\Lambda = 0$ . . . . .	31
2.2 Ecuaciones de Friedmann con $\Lambda \neq 0$ . . . . .	35
2.3 Solución a las ecuaciones de Friedmann con $\Lambda = 0$ . . . . .	36
2.4 Los problemas de la constante cosmológica y de coincidencia cósmica .	38
2.5 Materia oscura . . . . .	39
2.6 Energía oscura . . . . .	40
2.7 Modelo de Quinta esencia . . . . .	41

2.8	Modelos de K-esencia . . . . .	43
2.9	Expansión acelerada con un campo fantasma . . . . .	44
2.10	Fluido viscoso en cosmología inflacionaria . . . . .	45
2.11	Fluido viscoso en cosmología de expansión acelerada . . . . .	48
<b>III</b>	<b>Fluido cosmológico viscoso autointeractuante desde una teoría escalar-tensorial geométrica de la gravedad</b>	<b>51</b>
3.1	Teoría escalar-tensorial geométrica de gravitación . . . . .	52
3.2	Fluido oscuro viscoso autointeractuante. . . . .	56
3.3	Fluido oscuro viscoso con $\omega_{df}$ constante. . . . .	59
3.4	Fluido oscuro viscoso con una ecuación de estado termodinámica. . . . .	63
	<b>Conclusiones</b>	<b>66</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>69</b>

# Introducción

Las ecuaciones publicadas originalmente por Einstein entre 1915 y 1916 [1] predecían un universo en expansión. Sin embargo, Einstein concebía el universo estático y por ese motivo agregó a sus ecuaciones un término proporcional al tensor métrico, i. e. la constante cosmológica para que su modelo predijera un universo estático.

Esa "solución" resultó un fracaso en la teoría debido a que aunque se conseguía el carácter estático del Universo, éste era inestable. Para el año 1922, el matemático y físico ruso Alexander Friedmann publicó un artículo donde proponía una solución a las ecuaciones de Einstein originales que predecían un universo en expansión [2]. Esa solución fue rechazada por el mismo Einstein dado que se oponían a su visión respecto al comportamiento del Universo. Sin embargo, la idea de que el universo se expandía no fue aceptada por la comunidad científica de esa época y fue hasta después de la muerte de Friedmann que Lemaitre popularizó esa idea después del descubrimiento de Hubble.

Para el año 1927, el sacerdote belga George Lemaitre fue el primero en proponer lo que actualmente se conoce como ley de Hubble y dar una estimación de la llamada constante de Hubble [3]. Sus trabajos tampoco tuvieron gran impacto a pesar de que

en el mismo año visitó a Einstein para hablarle personalmente de su trabajo sin tener ninguna aceptación importante.

Dos años después, en 1929, el astrónomo estadounidense Edwin Hubble publicó el resultado de sus observaciones en las que se hacía notar un corrimiento hacia el rojo de las nebulosas extragalácticas que observó [4], lo cual, solo era explicado considerando que éstas se alejaban de la Tierra. También demostró que la velocidad con la que alejan tiene una relación directa con su distancia intrínseca. Con estos resultados varios estudiosos de la época adoptaron la idea de la expansión del universo, incluyendo el propio Einstein, quién aceptó que había cometido un error.

Durante las décadas posteriores, se aceptó la teoría de la expansión del universo, y de manera general, se creía que esta expansión en algún momento tenía que ceder, es decir, se creía en una expansión desacelerada del universo. Pero en 1988 los proyectos independientes, Supernova Cosmology Project y the High-Z Supernova Search Team, ambos usando supernovas tipo Ia como candelas estándar encontraron que en la actualidad la expansión se estaba acelerando [5, 6, 7]. Por este descubrimiento los astrónomos estadounidenses Saul Perlmutter, Brian P. Schmidt y el australiano Adam G. Riess obtuvieron el Premio Nobel de Física 2011, pues vino a revolucionar la idea que se tenía de la evolución dinámica del universo, abriendo aún más interrogantes.

En la cosmología moderna, el problema de la expansión acelerada del universo en la época actual sigue sin una explicación definitiva. Para intentar resolver esta encrucijada se han propuesto diversos modelos, entre ellos, modelos de energía oscura,

teorías de gravedad modificada, fluidos oscuros multicomponentes etc. La idea de un fluido oscuro es interesante, y consiste en suponer que todo el sector oscuro del universo (materia oscura más energía oscura) puede modelarse como un solo fluido perfecto. Dado que las ecuaciones de estado para materia oscura y energía oscura son distintas, el objetivo es lograr que el fluido pueda reproducir ambas ecuaciones de estado en diferentes circunstancias. Esta idea fue motivada por el hecho de que las evidencias observacionales que se tienen sobre la existencia tanto de materia oscura como de energía oscura son de naturaleza puramente gravitatoria, y en ese sentido se pensó que pueden considerarse como aspectos de un mismo objeto, en este caso, el fluido oscuro.

Por otro lado, sabemos que para construir un modelo cosmológico se requiere de una teoría de gravitación. Dados los problemas de la relatividad general a escalas en los sectores IR (escala cosmológica) y UV (escala cuántica), existen en la actualidad diferentes teorías modificadas de la gravedad que intentan ser más generales y libres de esos problemas. A ese respecto, recientemente se ha propuesto un nuevo formalismo conocido como teorías escalares-tensoriales geométricas de la gravedad en la que la gravedad no solo tiene un carácter tensorial, sino que además tiene un aspecto escalar [8], [9]. Precisamente, ese aspecto escalar de la gravedad ha permitido que puedan formularse modelos de energía oscura en ese contexto para intentar explicar el origen de la presente aceleración en la expansión del universo. En estos modelos la energía oscura es descrita por un campo escalar, de ahí que nos surge la interrogante ¿puede la materia oscura también modelarse por un campo escalar?. Más aún, ¿Pueden ambos sectores oscuros ser descritos por un solo fluido oscuro y éste a su

vez ser descrito de manera unificada por un solo campo escalar?. En este proyecto de tesis investigaremos las posibles respuestas a esta pregunta. Y como veremos, esto pudiera darse en el contexto de las teorías escalares-tensoriales geométricas de la gravedad, pues en ese tipo de teorías el campo escalar tiene un origen geométrico y no se impone a priori en el modelo.

En este proyecto de tesis doctoral nos enfocaremos en proponer una nueva descripción cosmológica de la época actual del universo, a través de un fluido oscuro viscoso, en el contexto de una teoría escalar-tensorial geométrica de la gravedad. La idea central consiste en investigar la posibilidad de que un fluido oscuro viscoso pueda ser descrito de manera unificada por el sector escalar de la gravedad, permitiéndonos explicar cómo es que un fluido oscuro puede en ocasiones describir materia oscura y en otros energía oscura. Con este objetivo la tesis está organizada de la siguiente forma:

En el capítulo I, se revisan brevemente los elementos básicos de las teorías de la relatividad especial y general. En particular se obtienen las ecuaciones de Einstein en el vacío y en presencia de materia. Además se explica el principio variacional de Palatini y se estudian los elementos fundamentales de las teorías escalares tensoriales tradicionales.

El capítulo II, se dedica al estudio de la cosmología. Específicamente se estudia el elemento cosmológico estándar incluyendo cosmología inflacionaria del universo temprano y modelos cosmológicos con fluidos viscosos.

El capítulo III lo dedicamos al desarrollo del modelo propio de los objetivos de esta tesis. En particular consideramos en una teoría escalar-tensorial geométrica de la gravedad un fluido oscuro viscoso autointeractuante en donde la no-canonicidad del término cinético del campo escalar se asocia a la viscosidad, para construir un modelo cuya descripción sea unificada por un solo campo escalar que nos permita explicar la presente expansión acelerada del universo.

Finalmente en las conclusiones se hacen comentarios finales sobre las predicciones del modelo.

# Capítulo I

## Elementos de gravitación

En este capítulo se revisan brevemente los fundamentos de la teoría de la relatividad general y de algunas teorías escalares-tensoriales de la gravedad. En especial se hace énfasis en el formalismo para la obtención de las ecuaciones de Einstein a partir de la funcional de acción de Einstein-Hilbert mediante los métodos variacionales de Hilbert y Palatini. Este último se caracteriza porque no asume una relación a priori entre la métrica y la conexión afín sino que la determina [10, 11].

### 1.1 Introducción a la teoría de la relatividad especial

La teoría de la relatividad especial usa la geometría del espacio-tiempo plano para la descripción de fenómenos no gravitatorios, y está basada en 2 hechos fundamentales: *Principio de relatividad* y *el principio de un límite universal de la velocidad*.

Antes de enunciar el principio de relatividad especial cabe mencionar que éste es una generalización al principio de la relatividad utilizado en la mecánica clásica, llamado principio de relatividad restringido o de relatividad Galileana el cual postula que todos los observadores inerciales son equivalentes en lo que respecta a experimentos

puramente dinámicos en mecánica clásica. Esto significa que si un observador inercial lleva a cabo un experimento y descubre una ley, entonces otro observador inercial que lleve a cabo el mismo experimento debe descubrir la misma ley, por lo que las ecuaciones deben ser invariantes bajo el grupo de transformaciones de Galileo [11].

Para establecer estas transformaciones, vamos a suponer 2 marcos de referencias inerciales  $F, F'$  tal que  $F'$  se está alejando del sistema de referencia  $F$  con una velocidad relativa constante en dirección  $x$ ,  $v_x$ , suponiendo que un evento  $E$  ocurre en un punto del espacio-tiempo medido desde el marco  $F'$  en las coordenadas  $E'(t', x', y', z')$  entonces las reglas de transformación para las coordenadas del evento medido en  $F$  son

$$t = t', \quad x = x' + v_x t', \quad y = y', \quad z = z', \quad (1.1)$$

es decir,  $E(t, x' + v_x t', y, z)$  [11].

Al ser estudiado por Einstein, este principio lo consideró inadecuado porque no existe un "experimento puramente dinámico" como tal, ya que cuando se realiza un experimento, por más sencillo que sea, por lo menos se involucra la observación entonces también interviene la óptica y en experimentos más complejos intervienen otras áreas de la física. Por lo que Einstein postula el principio de la relatividad:

**Principio 1.** *El principio de relatividad establece que todos los observadores inerciales son equivalentes, [11], dicho de otra forma, que las leyes de la física para un mismo fenómeno son las mismas para todo observador inercial sin la restrcción de que sean puramente dinámicos.*

Entonces las ecuaciones que describen un fenómeno físico deben ser invariantes

ante un grupo diferente al de Galileo, las cuales se mencionan más adelante. El principio de relatividad postulado por Einstein no contradice al de la relatividad de Galileo sino que lo completa. Ahora abordamos el segundo principio:

**Principio 2.** *El principio de un límite universal de la velocidad, la cual, establece que en todo marco inercial existe un límite finito y constante universal para la velocidad, definido como  $c = 299,792,459 \frac{m}{s}$  [12].*

Ahora, veamos cómo este último principio no se cumple con las transformaciones de Galileo y resulta la necesidad de otro grupo de transformaciones. Supongamos de nuevo que el marco  $F'$  se mueve con una velocidad en dirección  $x$  positiva y en él se emite un haz de luz en la misma dirección, entonces al paso de un tiempo  $t$ , la distancia del frente de onda del haz de luz respecto al marco  $F$  es

$$x = x' + vt = ct + vt = (c + v)t, \quad (1.2)$$

es decir, la velocidad del frente de onda respecto al marco  $F$  es  $v_F = c + v$ , lo cual muestra que las transformaciones de Galileo no cumplen con este principio de límite universal. Esta es otra razón por lo que la relatividad especial conduce a utilizar otras reglas de transformaciones diferentes a las de Galileo ante las cuales se cumplieran ambos postulados, conocidas como *Transformaciones de Lorentz* las cuales para dos sistemas de referencia inerciales  $F, F'$  (Figura 1.1) vienen dadas por [11]

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

es decir

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z \quad (1.4)$$

donde  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$  y  $\beta = \frac{v}{c}$ , los sistemas  $F, F'$ , fig.(1.1), donde  $F'$  se mueve en dirección  $x$  con velocidad constante respecto a  $F$  fijo tal que  $y = y'$  y  $z = z'$ .

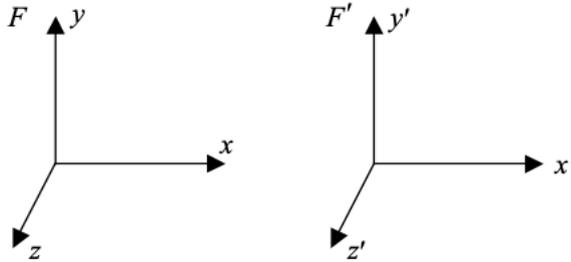


Figura 1.1: El marco  $F'$  se aleja de  $F$  con velocidad  $v_x$ .

Con esto, veamos cómo la velocidad de un fenómeno es observado entre diferentes sistemas de referencias inerciales para después comprobar si cumple con el principio del límite universal de la velocidad.

Supongamos que un marco de referencia inercial  $F'$  se mueve con  $v_1$  respecto a  $F$  y otro  $F''$  se mueve con  $v_2$  respecto a  $F'$ , los tres inerciales y movimientos relativos con velocidad constante, para encontrar la manera en que el fenómeno en  $F''$  es observado desde  $F$  necesitamos transformar un evento en  $F''$  a  $F$  haciendo las

transformaciones de  $F''$  a  $F'$  y de  $F'$  a  $F$ . Asignemos

$$\begin{bmatrix} ct'' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \Xi_2 \begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \Xi_1 \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

donde  $\Xi_1$  y  $\Xi_2$  denotan las matrices de transformación. Luego se sigue que

$$\begin{bmatrix} ct'' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \Xi_2 \Xi_1 \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

Pero, como son marcos de referencia inerciales, la matriz de transformación entre  $F$  y  $F''$  debe ser de la misma forma que  $\Xi_3$  en

$$\begin{bmatrix} ct'' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \Xi_3 \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Para calcular la forma de  $\Xi_3$  empleamos (1.3) y llegamos a

$$\Xi_1 = \begin{bmatrix} \gamma_1 & -\beta_1\gamma_1 & 0 & 0 \\ -\beta_1\gamma_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Xi_2 = \begin{bmatrix} \gamma_2 & -\beta_2\gamma_2 & 0 & 0 \\ -\beta_2\gamma_2 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Xi_3 = \begin{bmatrix} \gamma_3 & -\beta_3\gamma_3 & 0 & 0 \\ -\beta_3\gamma_3 & \gamma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Así, con ayuda de (1.6) y (1.7) vemos que  $\Xi_3 = \Xi_2 \Xi_1$ , es decir

$$\begin{bmatrix} \gamma_3 & -\beta_3 \gamma_3 & 0 & 0 \\ -\beta_3 \gamma_3 & \gamma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_2 \gamma_1 (1 + \beta_1 \beta_2) & -\gamma_1 \gamma_2 (\beta_1 + \beta_2) & 0 & 0 \\ -\gamma_1 \gamma_2 (\beta_1 + \beta_2) & \gamma_2 \gamma_1 (1 + \beta_1 \beta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Ahora, igualando  $\Xi_{3tt} = (\Xi_2 \Xi_1)_{tt}$  tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta_3^2}} = \frac{1 + \beta_1 \beta_2}{\sqrt{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}}. \quad (1.10)$$

Resolviendo para  $\beta_3^2$  y usando que  $\beta_i = \frac{v_i}{c}$  se obtiene

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \quad (1.11)$$

Esta última expresión representa la forma de sumar de velocidades que cumple el principio del límite universal de velocidad. Para mostrarlo, apliquemos (1.11) al problema descrito anteriormente donde se obtiene el resultado (1.2), (no admisible por el principio de límite universal de velocidad), llegamos a que la velocidad del frente de onda de la luz medido desde  $F$  es

$$v_3 = \frac{c + v}{1 + \frac{cv}{c^2}} = c \quad (1.12)$$

que muestra que no hay diferencia en la medición de la velocidad de la luz en diferentes marcos inerciales. Por otro lado, las transformaciones de Lorentz implican algunas consecuencias como la dilatación del tiempo y la contracción de longitudes, entre otras.

Para estudiar la dilatación del tiempo, supongamos dos marcos de referencia inerciales  $F$  y  $F'$  donde este último se mueve a velocidad constante  $v$  respecto a  $F$ , si en  $F'$  un evento dura  $\Delta t'$  entonces ese evento observado desde  $F$  dura

$$\Delta t = \gamma \Delta t', \quad (1.13)$$

es decir, el lapso de tiempo medido en  $F'$ , donde ocurre el evento el tiempo correrá más lento que el medido en  $F$ , por lo tanto, el tiempo no es absoluto, a este fenómeno se le conoce como dilatación del tiempo. Respecto a la contracción de la longitud, si una distancia a lo largo del eje  $x'$  en  $F'$  se mide como  $\Delta x'$  y en  $F$  se medirá

$$\Delta x = \gamma^{-1} \Delta x'. \quad (1.14)$$

En el contexto de la relatividad especial, se re-definen las expresiones de energía, masa, entre otras. Por ejemplo, un cuerpo con masa en reposo  $m_0$  al adquirir una velocidad  $v$  tiene una masa relativista  $m(v) = \gamma m_0$  y tiene una energía relativista total  $E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$  donde  $p = p(v) = \gamma m_0 v$  es el momento relativista [11].

Además, es importante mencionar que la teoría de la relatividad especial es un formalismo que usa una *variedad* o estructura matemática para describir fenómenos en un espacio-tiempo en la cual no hay curvatura (espacio-tiempo de Minkowski)[10], por lo que la teoría de la relatividad especial no es una teoría de gravitación.

**Definición I.1.** *En el espacio tiempo de Minkowski, el intervalo espacio-temporal proporciona la "distancia" entre 2 eventos en el espacio y en el tiempo. Supongamos que ocurren 2 eventos  $E_1$  y  $E_2$  en el sistema  $F$  con coordenadas  $E_1 = (t_1, x_1, y_1, z_1)$  y*

$E_2 = (t_2, x_2, y_2, z_2)$  entonces el intervalo espacio-temporal  $(\Delta s)^2$  se define como

$$(\Delta s)^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2, \quad (1.15)$$

donde  $c$  es la valor de la rapidez de la luz en el vacío [10].

La ecuación (1.15) puede escribirse de manera más compacta

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2. \quad (1.16)$$

Un intervalo puede ser de tipo temporal, espacial o nulo ("timelike", "spacelike" o "null") si  $(\Delta s)^2 > 0$ ,  $(\Delta s)^2 < 0$ ,  $(\Delta s)^2 = 0$ , respectivamente [10]. Si la distancia entre 2 eventos es infinitesimal, es decir,  $E_1 = (t, x, y, z)$  y  $E_2 = (t + \Delta t, x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ , entonces (1.15) se escribe como

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1.17)$$

o de la forma

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.18)$$

donde  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$  y  $\eta_{\mu\nu}$  se conoce como la métrica o tensor métrico que en el espacio-tiempo de Minkowski, pero de manera general se representa como  $g_{\mu\nu}$ , la cual se puede representar de manera matricial como  $\text{diag}[\eta_{\mu\nu}] = (+1, -1, -1, -1)$  y las otras componentes nulas.

La teoría de la relatividad especial, como ya se mencionó, es válida en un espacio-tiempo plano. En la siguiente sección se aborda la generalización de esta teoría en la cual se considera la curvatura en el espacio-tiempo y sus consecuencias.

## 1.2 Principio variacional de Palatini y las ecuaciones de Einstein

La teoría de la relatividad general es una teoría de gravitación formulada por Albert Einstein en 1915 en la cual la gravedad se manifiesta como la curvatura del espacio-tiempo [1]. Esta teoría generaliza a la teoría de la relatividad especial y se basa en el *principio de equivalencia* [10]. En esta sección se obtienen las ecuaciones de campo de Einstein de esta teoría aplicando métodos variacionales: *el de Hilbert y el de Palatini*, ambos en el marco de la geometría de Riemann.

Para obtener las ecuaciones de Einstein de la relatividad general empleamos el Principio de mínima acción o de acción estacionaria  $\delta S = 0$  [11]. Considerese una acción en forma canónica como

$$S = \int d^n x \hat{\mathcal{L}}, \quad (1.19)$$

donde  $\hat{\mathcal{L}}$  es la densidad lagrangiana [13]. La variable dinámica de la densidad lagrangiana en la relatividad general es el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ . La gravedad se manifiesta como la curvatura de Ricci  $R_{\mu\nu}$  del espacio-tiempo. El tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  se define como una contracción del tensor de Riemann como se ve en la fórmula

$$R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} = R_{\mu\nu}. \quad (1.20)$$

Este tensor es simétrico y se define en términos de la conexión afín por[14])

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\rho}\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\rho\mu}^{\rho} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\rho\mu}^{\lambda}, \quad (1.21)$$

donde  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}$  son las componentes de conexión afín, que en una geometría riemanniana

corresponden con los Símbolos de Christoffel de segunda especie que tienen la forma

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}(\partial_{\alpha}g_{\beta\mu} + \partial_{\beta}g_{\mu\alpha} - \partial_{\mu}g_{\alpha\beta}). \quad (1.22)$$

Esta forma es dada por el teorema de Levi-Civita que establece que solo existe una única conexión afín simétrica y compatible con la métrica en una geometría riemanniana [15]. La demostración de este teorema se sigue a continuación.

*Demostración:* De la definición de derivada covariante se sigue que

$$\nabla_{\mu}g_{\alpha\beta} = \partial_{\mu}g_{\alpha\beta} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda}g_{\lambda\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^{\lambda}g_{\lambda\alpha} = 0, \quad (1.23)$$

$$\nabla_{\beta}g_{\mu\alpha} = \partial_{\beta}g_{\mu\alpha} - \Gamma_{\beta\mu}^{\lambda}g_{\lambda\alpha} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}g_{\lambda\mu} = 0, \quad (1.24)$$

$$\nabla_{\alpha}g_{\beta\mu} = \partial_{\alpha}g_{\beta\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda}g_{\lambda\beta} = 0. \quad (1.25)$$

Ahora, haciendo (1.23)-(1.24)-(1.25) y usando la simetría de la conexión afín  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}$  obtenemos

$$\partial_{\mu}g_{\alpha\beta} - \partial_{\beta}g_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha}g_{\beta\mu} + 2\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}g_{\lambda\mu} = 0. \quad (1.26)$$

Por tanto, podemos escribir

$$g_{\lambda\mu}\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} = \frac{1}{2}(\partial_{\alpha}g_{\beta\mu} + \partial_{\beta}g_{\mu\alpha} - \partial_{\mu}g_{\alpha\beta}). \quad (1.27)$$

De esta manera se obtiene para la conexión afín la fórmula

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}(\partial_{\alpha}g_{\beta\mu} + \partial_{\beta}g_{\mu\alpha} - \partial_{\mu}g_{\alpha\beta}). \quad (1.28)$$

Esto significa que para cada  $g_{\alpha\beta}$  existe solo una única conexión afín dada por (1.28).  $\square$

Es importante aclarar que a pesar de su notación, la conexión no es un tensor por eso recibe el nombre de objeto o símbolo.

Continuando con el tensor de curvatura de Ricci (1.3), su traza se llama Escalar de

Ricci y escribimos

$$R = R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.29)$$

Una vez que hemos introducido los elementos básicos necesarios procederemos a la formulación lagrangiana de la relatividad general. Fue el matemático Hilbert quién desarrollo este formalismo y propuso la acción [10]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (1.30)$$

conocida como Acción de Hilbert-Einstein en el vacío, a partir de la cual se obtendrán las Ecuaciones de Einstein. Como que la derivada del tensor métrico se anula,  $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$ , no se pueden aplicar las ecuaciones de Euler- Lagrange ya que dependen de la primera derivada covariante. Entonces, aplicamos directamente el principio variacional a la variable dinámica de la acción, el tensor métrico.

La variacional de (1.30) es

$$\delta S = \int d^4x \delta(\sqrt{-g}R). \quad (1.31)$$

Usando que llegamos a

$$\delta S = \int d^4x [\delta(\sqrt{-g})g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}\delta(g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu})]. \quad (1.32)$$

Ahora, debemos expresar a los tres términos del integrando como productos que involucren a  $\delta g_{\mu\nu}$ , por tanto el segundo término se deja intacto pues ya esta expresado en esa forma. Comenzaremos con el primer término dado por

$$\delta S_{(1)} = \int d^4x (\delta(\sqrt{-g})g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}). \quad (1.33)$$

Para calcular la variación del determinante de una matriz, se emplea la identidad [10]

$$\delta(\det(A)) = \det(A) \text{Tr}(A^{-1} \delta A). \quad (1.34)$$

De esta manera haciendo  $A = (g_{\mu\nu})$ ,  $\det(A) = g$ , y  $A^{-1} = (g^{\mu\nu})$ , y usando  $\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \delta g^{\rho\sigma}$ , se obtiene

$$\delta g = -g(g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}). \quad (1.35)$$

Por tanto la variacional de  $\sqrt{-g}$  es dada por

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} (-g(g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu})) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.36)$$

Sustituyendo esta última expresión en (1.33) obtenemos

$$\delta S_{(1)} = \int (-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} R \delta g^{\mu\nu}) d^n x. \quad (1.37)$$

Ahora enfoquemos nuestra atención en el tercer término, dado como

$$\delta S_3 = \int d^4 x [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta(R_{\mu\nu})]. \quad (1.38)$$

En este caso, para calcular  $\delta R_{\mu\nu}$  utilizamos la Identidad de Palatini en la forma [11]

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda). \quad (1.39)$$

Así, sustituyendo (1.39) en (1.38) nos da

$$\delta S_3 = \int d^4 x (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\nabla_\lambda (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)]), \quad (1.40)$$

que puede escribirse como

$$\delta S_3 = \int d^4 x (\sqrt{-g} [g^{\mu\nu} \nabla_\lambda (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - g^{\mu\nu} \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)]). \quad (1.41)$$

Considerando que en una geometría riemanniana  $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$  y la regla de Leibniz llegamos a las identidades

$$\nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) = g^{\mu\nu} \nabla_\lambda (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda), \quad (1.42)$$

$$\nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) = g^{\mu\nu} \nabla_\nu (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda). \quad (1.43)$$

Analizando estas dos últimas expresiones, el miembro izquierdo se anula, lo cual se puede demostrar usando el Teorema de Stokes-Gauss-Ostrogradski [16] y debido a las condiciones del principio de mínima acción (en las fronteras de integración las variaciones son nulas), esto nos lleva a

$$\delta S_3 = 0. \quad (1.44)$$

Por tanto, la expresión (1.32) se reduce a

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.45)$$

Así el principio de mínima acción:  $\delta S = 0$ , implica

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0. \quad (1.46)$$

Las ecuaciones (1.46) son las ecuaciones de campo de Einstein en vacío, es decir, en ausencia de fuentes materiales. así, para incluir materia las ecuaciones de Einstein se obtienen a partir de la siguiente acción extendida

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{16\pi G} + \hat{\mathcal{L}}_M \right], \quad (1.47)$$

donde  $\hat{\mathcal{L}}_M$  es la densidad lagrangiana materia. Siguiendo el mismo procedimiento

variacional mostrado para el caso sin materia llegamos a [13]

$$\delta_g S = \int d^4x \left[ \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} \left[ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + R_{\mu\nu} \right] - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \right]. \quad (1.48)$$

De esta manera el principio de mínima acción:  $\delta_g S = 0$ , nos lleva a

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.49)$$

donde se ha usado la definición del tensor de energía-momento [13]

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \delta_g (\sqrt{-g} \hat{\mathcal{L}}_M). \quad (1.50)$$

Las ecuaciones (1.49) son las ecuaciones de Einstein en presencia de materia, en donde esta última es descrita por  $T_{\mu\nu}$ .

Hasta este momento se ha considerado que la geometría de fondo a priori es la de Riemann a través de la condición de compatibilidad :  $\nabla_\lambda g_{\alpha\beta} = 0$ . Sin embargo, un procedimiento variacional más general y completo es aquel en el cual la geometría de fondo sea también determinada por el mismo procedimiento. Este formalismo es conocido como principio variacional de Palatini y a continuación nos enfocaremos en su estudio.

### 1.3 Principio variacional de Palatini

Este método está basado en la idea de considerar tanto la métrica  $g_{\mu\nu}$  como la conexión afín  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  variables dinámicas independientes en el lagrangiano de la acción

[11]. Esto implica que, a diferencia del procedimiento variacional de Hilbert, aquí hay que calcular adicionalmente la variación de la acción respecto a la conexión afín. Como la variación de la acción respecto a la métrica ya fue obtenida en la sección anterior nos enfocaremos en la otra variación.

Puede verse fácilmente que al tomar la variación de la acción (1.47) respecto a la conexión afín, lo único que depende de la misma es el escalar de curvatura de Ricci. Por tanto resulta que

$$(\delta S)_\Gamma = \int d^4x (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}). \quad (1.51)$$

Usando ahora que  $R_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\rho\mu}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\lambda$ , la identidad de Palatini (1.39), integrando por partes y haciendo uso del Teorema de Stokes-Gauss-Ostrogradski obtenemos

$$(\delta S)_\Gamma = \int d^4x \sqrt{-g} [\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \nabla_\nu (g^{\mu\nu}) - \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda (g^{\mu\nu})] = 0. \quad (1.52)$$

Esta expresión puede ser escrita como

$$\int d^4x \sqrt{-g} [(\delta_\lambda^\nu \nabla_\sigma g^{\mu\sigma} - \nabla_\lambda g^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda] = 0. \quad (1.53)$$

Dado que las variaciones  $\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  son arbitrarias se sigue entonces que

$$\delta_\lambda^\nu \nabla_\sigma g^{\mu\sigma} - \nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0. \quad (1.54)$$

Resolviendo (1.54) llegamos a

$$\nabla_\mu g_{\mu\nu} = 0. \quad (1.55)$$

Esta es la condición de compatibilidad de una geometría riemanniana, lo que significa que de acuerdo al principio variacional de Palatini, la geometría riemanniana es la

geometría de fondo correspondiente a la teoría de la relatividad general.

## 1.4 Geometría de Weyl

Las ecuaciones que Einstein formuló originalmente se basaban en la geometría de Riemann o riemanniana la cual es descrita por la condición de compatibilidad entre la métrica y la conexión afín [10]. En 1918 H. Weyl introdujo una geometría que generaliza a la geometría de Riemann como un intento de unificar a la gravedad y el electromagnetismo [17, 18]. Esta geometría es conocida como *geometría de Weyl*. La cual se aborda en esta sección.

La condición de compatibilidad de la métrica con la conexión en la geometría de Riemann implica la conservación del producto escalar entre vectores, cuando éstos son transportados paralelamente a lo largo de una curva arbitraria. Sin embargo, esta condición no convenció Hermann Weyl ya que le pareció restrictivo que los vectores al ser transportados paralelamente cambiando sus ángulos respecto a sus tangentes no pudieran cambiar sus longitudes o normas. Así en 1918 Weyl introdujo una nueva geometría la cual se caracteriza por la condición de compatibilidad [19]

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = \sigma_{\alpha} g_{\mu\nu}, \quad (1.56)$$

donde se observa la no-conservación del producto escalar al transportarse paralelamente. La ecuación (1.56) también es conocida como *condición de no metricidad* y al igual que la de Riemann, se le asocia una conexión afín única de la forma

$${}^{(w)}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} [g_{\beta\mu}\sigma_{\nu} + g_{\beta\nu}\sigma_{\mu} - g_{\mu\nu}\sigma_{\beta}], \quad (1.57)$$

donde se utiliza la etiqueta  $(w)$  para diferenciarla de la conexión afín riemanniana  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ .

Integrando (1.56) a lo largo de una curva  $C(x^{\alpha})$  desde  $P_0 = C(x_0^{\alpha})$  a un punto  $P = C(x^{\alpha})$  se obtiene

$$g(S(x^{\alpha}), T(x^{\alpha})) = g(S(x_0^{\alpha}), T(x_0^{\alpha})) \exp \left[ \int_{P_0}^P \sigma_{\alpha} dx^{\alpha} \right]. \quad (1.58)$$

esta ecuación muestra que la 1-forma  $\sigma_{\alpha}$  determina los reescalamientos del producto escalar entre los campos vectoriales transportados paralelamente.

Este formalismo fue analizado y criticado por Einstein argumentando que dada la forma (1.58) muestra la dependencia de la trayectoria en la longitud de los vectores, este efecto se explica en el llamado *efecto del segundo reloj* [20]. Una década después Weyl resolvió este problema dando origen a lo que se conoce como *geometría de Weyl-Integrable* que se revisa a continuación.

## 1.5 Geometría de Weyl-Integrable

Esta nueva geometría surgió de la necesidad eliminar la dependencia de la trayectoria de la solución de la condición de Weyl (1.56) y resolver la discordancia entre la geometría de Weyl y el efecto de segundo reloj [20]. la idea consiste en encontrar la condición bajo la cuál

$$g(S(x^{\alpha}), T(x^{\alpha})) = g(S(x_0^{\alpha}), T(x_0^{\alpha})). \quad (1.59)$$

Esto puede darse si

$$\exp \left[ \oint_{P_0}^P \sigma_\alpha dx^\alpha \right] = 1, \rightarrow \oint_{P_0}^P \sigma_\alpha dx^\alpha = 0, \quad (1.60)$$

la cual se cumple si  $\sigma_\alpha$  es el gradiente de un campo escalar  $\phi$ , es decir, si  $\sigma_\alpha = \phi_{,\mu}$  [19].

En este caso la condición de metricidad (1.56) se transforma como

$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = \phi_{,\mu} g_{\alpha\beta}. \quad (1.61)$$

Esta última condición resuelve el problema de la dependencia de la trayectoria presente en la geometría original de Weyl, para trayectorias cerradas. Esta es la geometría de Weyl Integrable y su conexión afín asociada tiene la forma

$${}^{(w)}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} [g_{\beta\mu} \phi_{,\nu} + g_{\beta\nu} \phi_{,\mu} - g_{\mu\nu} \phi_{,\beta}]. \quad (1.62)$$

Por último, cabe destacar que la ecuación (1.61) es invariante bajo las siguientes transformaciones aplicadas simultáneamente

$$\bar{g} = e^f g, \quad (1.63)$$

$$\bar{\phi} = \phi + f. \quad (1.64)$$

Algo interesante es que cuando hacemos la elección,  $f = -\phi$ , se obtiene una geometría riemanniana efectiva. Este hecho se analizará en el capítulo III como parte del formalismo del trabajo de investigación.

## 1.6 Teoría escalar-tensorial de Brans-Dicke

Una teoría escalar-tensorial de gravitación es una alternativa a la relatividad general de Einstein. La idea de una teoría escalar-tensorial se estableció en el trabajo de Brans y Dicke en 1961[21]. Esa teoría involucra un campo escalar no-mínimamente acoplado a la gravedad en su acción.

El principal motivo para proponer una teoría alterna a la gravedad proviene de la idea de introducir el Principio de Mach en una descripción gravitacional. Así pues, en la teoría de Brans Dicke el acomplamiento gravitacional ya no es una constante sino que considera la distribución de la materia en el universo y es descrito por un campo escalar  $\phi$ . La acción que la describe en el marco de Jordan es [22]

$$S_{BD} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) + \mathcal{L}_m \right], \quad (1.65)$$

donde  $\mathcal{L}_m$  es la densidad lagrangiana de materia ordinaria, es decir, cualquier materia diferente al campo escalar,  $\omega$  es un parámetro constante adimensional y  $V(\phi)$  es el potencial asociado al campo escalar.

Calculando la variación respecto a la métrica obtenemos [22]

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu}^{(m)} + \frac{\omega}{\phi^2} \left[ \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi \right] + \frac{1}{\phi} [\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi] - \frac{V}{2\phi} g_{\mu\nu}, \quad (1.66)$$

donde  $T_{\mu\nu}^{(m)}$  es el tensor de energía-momento asociado a materia ordinaria.

Variando (1.65) respecto al campo escalar  $\phi$  obtenemos la ecuación

$$\frac{2\omega}{\phi} \square\phi + R - \frac{\omega}{\phi^2} \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi - \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (1.67)$$

Calculando la traza de (1.66) llegamos a

$$R = -\frac{8\pi T^{(m)}}{\phi} + \frac{\omega}{\phi^2} \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi + \frac{3\square\phi}{\phi} + \frac{2V}{\phi}. \quad (1.68)$$

Usando esta última ecuación y (1.67) se tiene

$$\square\phi = \frac{1}{2\omega + 3} \left[ 8\pi T^{(m)} + \phi \frac{dV}{d\phi} - 2V \right]. \quad (1.69)$$

Esta ecuación describe la dinámica del campo escalar. Se sigue de la ecuación (1.67) que el acoplamiento gravitatorio, el cual es constante en la relatividad general, en la teoría BD es una función dependiente de las coordenadas en el espacio-tiempo y es dado por  $G_{ef} = \frac{1}{\phi}$ .

## 1.7 Teoría escalar-tensorial generalizada

Una teoría escalar-tensorial más general que la teoría de BD es dada por la acción [22]

$$S^{ET} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{f(\phi)}{2} R - \frac{\omega(\phi)}{2} \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi - V(\phi) \right] + S^{(m)}, \quad (1.70)$$

donde  $S^{(m)}$  no depende explícitamente del campo escalar  $\phi$ . La diferencia respecto a (1.65) es que el parámetro  $\omega(\phi)$  es una función del campo escalar y por ende depende de la posición en el espacio-tiempo. La acción (1.70) puede transformarse en (1.65)

implementando la transformación

$$f(\phi) = \frac{\phi}{8\pi}, \quad \omega(\phi) = \frac{\omega_0}{8\pi\phi}, \quad (1.71)$$

y el potencial  $V(\phi)$  siendo reescalado por un factor de  $16\pi$ . Otra forma de acción en la teoría escalar-tensorial, alterna a (1.70) frecuentemente utilizada con término cinético no-canónico en la literatura es [22]

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right] + S^{(m)}. \quad (1.72)$$

Mediante la transformación

$$\phi = f(\varphi), \quad \omega(\phi) = \frac{f(\varphi)}{2(df/d\varphi)^2}, \quad U(\varphi) = V[f(\varphi)], \quad (1.73)$$

la acción (1.72) se transforma en

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} \left[ f(\varphi) R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - U(\varphi) \right] d^4x + S^{(m)}. \quad (1.74)$$

Nótese que en esta acción se ha canonizado el término cinético del campo escalar.

## 1.8 Teoría de Gravedad inducida

La teoría de Gravedad Inducida es formalmente una teoría escalar-tensorial descrita por la acción [22]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{\epsilon\phi^2}{2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right] + S^{(m)}, \quad (1.75)$$

con  $G_{ef} = \frac{1}{8\pi\epsilon\phi^2}$  que se considera el acomplamiento gravitacional efectivo. Esta teoría fue desarrollada originalmente por Sakahrov y su idea principal es que la gravedad podría no ser fundamental, es decir, partiendo de la teoría cuántica de campos para

el espacio plano, la acción gravitacional es inducida por los primeros efectos de bucle y el valor de  $G_{ef}$  es calculada en física de partículas como el valor esperado de vacío de  $\epsilon\phi^2$ . Aplicando las siguientes transformaciones

$$\phi = \sqrt{\varphi}, \quad \omega = \frac{1}{4}, \quad U(\varphi) = V(\sqrt{\varphi}), \quad (1.76)$$

a la acción (1.75), se obtiene

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{\varphi}{2} R - \frac{\omega}{2\varphi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - U(\varphi) \right] + S^{(m)}, \quad (1.77)$$

la cual tiene una forma más cercana a (1.65). La teoría de gravedad inducida se utiliza, entre otras cosas, para implementar inflación en el universo temprano o en teorías de quinta esencia actuales.

Una vez que hemos hablado de las principales teorías de gravitación, estamos en posición de estudiar el modelo cosmológico estándar. Ese será nuestro objetivo en el siguiente capítulo.

## Capítulo II

# El modelo cosmológico estándar

El objeto de estudio de la Cosmología es la evolución del Universo como un todo. En la literatura podemos encontrar diferentes modelos matemáticos contemporáneos para describir el universo los cuales asumen como válido el Principio Copernicano o Cosmológico [10], que establece que el universo es espacialmente homogéneo e isotrópico a grandes escalas.

En este capítulo se estudiará el modelo cosmológico estándar con mayor aceptación en la actualidad también conocido como  $\Lambda$ -CDM. Este modelo describe las diferentes épocas en la evolución del universo, incluyendo la presente época de expansión acelerada cuya aceleración se explica a partir de la constante cosmológica  $\Lambda$  introducida por Einstein por motivos distintos. En la actualidad la constante cosmológica se asocia con una densidad de energía de vacío que permea el espacio generando una expansión acelerada del mismo notoria a escalas mayores a  $10^{28}$  cm. A tal energía de vacío se le conoce como energía oscura. Adicionalmente, incluimos en este capítulo algunos modelos que consideran un fluido viscoso para la época inflacionaria del universo temprano y de expansión acelerada actual.

## 2.1 Ecuaciones de Friedmann con $\Lambda = 0$

El principio cosmológico está relacionado con dos propiedades matemáticas de una variedad diferenciable: isotropía y homogeneidad espaciales. La isotropía es aplicable en algún punto específico de la variedad y establece que el espacio se observa igual sin importar la dirección en la que se observe. Matemáticamente esto se expresa exigiendo invarianza local bajo el grupo de rotaciones espaciales 3-paramétrico. La homogeneidad espacial del universo significa que el universo es isotrópico en cada y todos los puntos y no en uno solo.

Como se mencionó antes, el principio cosmológico es de gran importancia en la construcción de los modelos cosmológicos modernos. Por tanto, considerando al espacio-tiempo como  $\mathbf{T} \times \Sigma$ , donde  $\mathbf{T}$  representa una variedad temporal y  $\Sigma$  una variedad espacial simétrica y homogénea. De esta manera el elemento diferencial de línea puede ser escrito como

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\sigma^2, \quad (2.1)$$

con  $t$  siendo la coordenada temporal,  $a(t)$  es el factor de escala y  $d\sigma^2$  es el elemento diferencial de línea en la variedad espacial, dado por

$$d\sigma^2 = \xi_{ij}du^i du^j, \quad (2.2)$$

donde  $u^i = (u^1, u^2, u^3)$  son las coordenadas de  $\Sigma$ , y  $\xi_{ij}$  es la métrica con la simetría requerida (homogénea e isotrópica).

La homogeneidad y la isotropía espaciales implementadas en el tensor de curvatura de Ricci, nos llevan a que la métrica espacial que satisface tales requerimientos es dada en

$$d\sigma^2 = \frac{dr'^2}{1 - kr'^2} + r'^2 d\Omega^2, \quad (2.3)$$

donde  $d\Omega^2 = r'^2 d\theta^2 + r'^2 \sin^2 \theta d\phi^2$  es el elemento diferencial de ángulo sólido y  $k$  es una constante normalizada asociada a la curvatura espacial que puede tomar los valores  $k = -1, 0, 1$  [10]. Si  $k = -1$  la variedad  $\Sigma$  tiene una curvatura negativa y corresponde a una superficie hiperbolóide, si  $k = 0$  es un plano y si  $k = +1$  se trata de una esfera. De esta manera, la clase de métricas que satisfacen el principio cosmológico es dada por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr'^2}{1 - kr'^2} + r'^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.4)$$

que es conocida como la métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) [10]. La métrica en (2.4) tiene la representación matricial

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a^2(t)}{1-kr'^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t)r'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t)r'^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

De esta manera, no es difícil ver que la métrica inversa tiene la representación matricial

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^{-2}(t)(1 - kr'^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^{-2}(t)r'^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^{-2}(t)r'^{-2} \sin^{-2}\theta \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Con ayuda de (2.5) y (2.6), los símbolos de Christoffel de segunda especie no nulos

son

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{1-kr^2}, \\
\Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}r^2, & \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta, \\
\Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma_{22}^1 &= -r(1-kr^2), \\
\Gamma_{33}^1 &= -r(1-kr^2) \sin^2 \theta, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \\
\Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

De esta manera, las componentes no nulas del tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  tienen la forma

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, \\
R_{11} &= \frac{a\ddot{a}+2\dot{a}^2+2k}{1-kr^2}, \\
R_{22} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), \\
R_{33} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \operatorname{sen}^2 \theta.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Para el escalar de Ricci  $R$  obtenemos

$$R = -6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]. \tag{2.9}$$

hasta ahora, solo se ha calculado la parte geométrica de las ecuaciones de Einstein (1.49). Por tanto para construir las ecuaciones de campo completamente, necesitamos establecer la forma de  $T_{\mu\nu}$ .

Dada la isotropía y homogeneidad espaciales establecidas por el principio cosmológico, puede pensarse la materia distribuida en el universo a gran escala como un fluido perfecto. El tensor de energía momento  $T_{\mu\nu}$  para un fluido perfecto tiene la forma [10]

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu}p, \tag{2.10}$$

donde  $\rho$  y  $p$  son la densidad de energía y la presión del fluido, respectivamente, y  $U^\sigma$  corresponde a la 4-velocidad del fluido en cada punto. En particular, en el contexto cosmológico  $U^\sigma$  se asocia con la 4-velocidad de una clase de observadores comóviles con la expansión del universo determinados por  $U^\mu = \delta_0^\mu = (1, 0, 0, 0)$ . Por tanto, el tensor de energía-momento tiene la representación matricial

$$(T_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(1 - kr^2)^{-1}p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2r^2p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2r^2\text{sen}^2\theta p \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Con ayuda de (2.8), (2.9) y (2.11) la componente tiempo-tiempo de las ecuaciones (1.49) nos lleva a

$$H^2 + \frac{\kappa}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3}, \quad (2.12)$$

donde  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  es el parámetro de Hubble. Análogamente, las componentes espacio-espacio de (1.49) resultan en

$$2\dot{H} + 3H^2 + \frac{\kappa}{a^2} = -8\pi Gp. \quad (2.13)$$

Las ecuaciones (2.12) y (2.13) se conocen como ecuaciones de Friedmann para un universo en expansión. Por otro lado, la conservación del tensor de energía-momento  $\nabla_\mu T_{\alpha\beta} = 0$  implica

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}[\rho + p] = 0. \quad (2.14)$$

Esta es una ecuación de conservación que expresa la conservación de la energía. Sin embargo, las ecuaciones (2.12) y (2.13) no son independientes así que el sistema (2.12) y (2.14) es indeterminado. Esto significa que aún falta una ecuación para

tener un sistema compatible determinado. Esta ecuación es la ecuación de estado barotrópica:  $p = \omega_e \rho$ , donde  $\omega_e$  es un parámetro constante. Físicamente la ecuación de estado nos determina el tipo de materia que se está considerando. Los principales son  $\omega_e = 0$  que corresponde a polvo,  $\omega_e = 1/3$  que corresponde a radiación y  $\omega_e = -1$  que corresponde a una energía de vacío.

## 2.2 Ecuaciones de Friedmann con $\Lambda \neq 0$

La constante cosmológica  $\Lambda$  fue incluida por Einstein [23] en las ecuaciones de campo de su teoría de la Relatividad General, a pesar de que éstas predecían un universo dinámico. Esto sucedió porque en esa época Einstein y otros físicos creían en que el Universo era estático, por lo cual, modificó dichas ecuaciones incorporando la  $\Lambda$  para establecer el carácter estático del universo en ellas. En el momento que las observaciones de Hubble demostraron que el universo se estaba expandiendo, Einstein la cuestionó de tal manera que la consideró como el más grande error de su vida. En la actualidad esa constante se ha reincorporado como la explicación más simple para explicar la expansión acelerada del universo [5, 6, 7].

La acción de Einstein-Hilbert (1.30) [10] con la constante cosmológica tiene la forma

$$S_\Lambda = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_{(m)} \right]. \quad (2.15)$$

ASÍ, las ecuaciones de campo asociadas a esta acción son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (2.16)$$

Por tanto las ecuaciones de Friedmann (2.12) y (2.13) se modifican en la forma

$$H^2 + \frac{\kappa}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.17)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 + \frac{\kappa}{a^2} = -8\pi Gp + \Lambda, \quad (2.18)$$

Ahora estamos interesados en las soluciones de las ecuaciones de Friedmann, por simplicidad, en el caso de  $\Lambda = 0$ .

### 2.3 Solución a las ecuaciones de Friedmann con $\Lambda = 0$

Mediciones recientes del (CMBR) han demostrado que el universo es espacialmente plano [24], es decir,  $\kappa = 0$ . En ese caso las ecuaciones (2.12) y (2.13) se reducen a

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}, \quad (2.19)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -8\pi Gp. \quad (2.20)$$

Para una ecuación de estado barotrópica  $p = \omega_e \rho$ , la ecuación de conservación puede expresarse como

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} [1 + \omega_e] = 0. \quad (2.21)$$

Las soluciones para la densidad de energía  $\rho(a)$  y para el factor de escala  $a(t)$  son aproximadas por

$$\rho \propto a(t)^{-3(1+\omega)}, \quad (2.22)$$

$$a(t) \propto (t - t_0)^{\frac{2}{3(1+\omega)}}. \quad (2.23)$$

A estas soluciones les corresponde un parámetro de Hubble (para  $\omega \neq -1$ ) de la forma

$$H(t) = \frac{2}{3(1 + \omega)(t - t_0)}, \quad (2.24)$$

En el caso de  $\omega = -1$  se sigue de (2.22) que  $\rho = cte$  y usando (2.19) obtenemos para el factor de escala

$$a(t) = a_0 e^{\sqrt{\frac{8\pi G \rho}{3}} t} = a_0 e^{Ht} \quad (2.25)$$

donde  $H = cte$ . Para otros valores importantes de  $\omega$  obtenemos:

a) Para materia fría (polvo)  $p = 0$ , es decir,  $\omega = 0$

$$a(t) \propto (t - t_0)^{2/3}, \quad \rho(t) \propto a(t)^{-3}, \quad (2.26)$$

b) Para materia relativista (radiación)  $\omega = \frac{1}{3}$

$$a(t) \propto (t - t_0)^{1/2}, \quad \rho(t) \propto a(t)^{-4}, \quad (2.27)$$

c) Para energía de vacío ( $\Lambda$ )  $\omega = -1$ ,

$$a(t) \propto e^{Ht}, \quad \rho(t) = cte. \quad (2.28)$$

Los casos a) y b) corresponden a una expansión desacelerada del universo, basta con poner la relación entre  $\rho$  y  $p$  en (2.20) para obtener  $\ddot{a} < 0$ . En búsqueda de tener una expansión acelerada  $\ddot{a} > 0$ , es necesario que

$$\omega < -\frac{1}{3}, \quad (2.29)$$

por lo que el caso de  $\Lambda$ ,  $\omega = -1$ , es un caso de expansión acelerada. En las últimas décadas a la  $\Lambda$  se le ha considerado como un candidato para energía oscura [25].

## 2.4 Los problemas de la constante cosmológica y de coincidencia cósmica

Al establecer que la aceleración cósmica es causada por  $\Lambda$ , es necesario que  $\Lambda$  sea del orden de  $H^2$  en el presente, es decir [25]:

$$\Lambda \approx H_0^2 = (2.1332h \times 10^{-42} GeV)^2. \quad (2.30)$$

Esto corresponde a una densidad de energía con valor

$$\rho_\Lambda \approx \frac{\Lambda m_{pl}^2}{8\pi} \approx 10^{-47} GeV^4 \approx 10^{-123} m_{pl}^4, \quad (2.31)$$

donde se ha utilizado  $h \approx 0.7$  y  $m_{pl} \approx 10^{19} GeV$ . Por otro lado, el valor de la densidad de energía de vacío  $\rho_{vac}$  obtenido de la teoría cuántica de campos [25] resulta

$$\rho_{vac} \approx \frac{k_{corte}^4}{16\pi^2} \approx \frac{m_{pl}^4}{16\pi^2} \approx 10^{74} GeV^4. \quad (2.32)$$

Luego, la razón entre la densidad de energía observada y la teórica es

$$\frac{\rho_{vac}}{\rho_\Lambda} = \frac{10^{74} GeV^4}{10^{-47} GeV^4} = 10^{121}. \quad (2.33)$$

Este es el problema de la constante cosmológica, pues el valor observacional necesario para explicar la aceleración en la expansión y el teórico dado por la teoría cuántica de campos no coinciden.

Asociado a la presente expansión acelerada se tiene también el problema de coincidencia cósmica. Este problema consiste en explicar porqué las densidades de vacío y de materia son aproximadamente del mismo orden en la actualidad. En otras

palabras, porqué no ocurrió antes o después, porqué exactamente ahora. Este problema, a pesar de las diferentes propuestas para resolverlo, se considera actualmente un problema abierto.

## 2.5 Materia oscura

La materia oscura es un tipo de materia no relativista que interactúa muy débilmente con las partículas de materia ordinaria. La existencia de la materia oscura fue enunciada por Zwicky [26], comparando la dispersión de las velocidades de galaxias en el cúmulo Coma con la masa de estrellas observables. Dado que la materia oscura no interactúa con la fuerza electromagnética, su presencia es inferida por sus efectos en la materia visible. La materia oscura puede acumularse en estructuras locales en el universo. De hecho, es sabido que la materia oscura ha participado en el crecimiento a gran escala de estructuras como galaxias y cúmulos de galaxias, la fracción de energía debida a la materia oscura en el universo actual es aproximadamente del 25%, mientras que la materia bariónica un 4% y la energía oscura es aproximadamente del 70%.

Las observaciones de Zwicky, han sido confirmadas por otras investigaciones, entre las cuales se ha establecido que incluso la materia en galaxias individuales como la Vía Láctea está dominada por la materia oscura [27], lo cual queda en evidencia porque resultó que los objetos orbitando a grandes distancias del centro galáctico se mueven con velocidad comparable a la que tienen los objetos mucho más cercanos al centro, resultado contrario a lo que se esperaba, ya que la velocidad rotacional debería arrojar ser  $v_r \propto r_C^{-1/2}$ , como en el sistema solar, pero a grandes distancias, la velocidad

se torna constante, esta es solo una de varias evidencias de la existencia de la "materia que no emite radiación" [28].

Existen diversos tipos de partículas candidatas a ser las que constituyen materia oscura, entre ellas destacan:

- a) Partículas masivas débilmente interactuantes (WIMP) [29, 30, 31, 32].
- b) Axions [33].
- c) Agujeros negros primordiales [34].

## 2.6 Energía oscura

Por otro lado, la energía oscura se distingue de las formas ordinarias de materia como los bariones y la radiación, ya que cuenta con una presión negativa, la cual, conduce a una expansión acelerada del universo en contra de la fuerza gravitacional. El candidato más simple a energía oscura es  $\Lambda$ , la cual contraresta los efectos de la gravedad, pero debido a los problemas descritos en la sección 2.3 se ha optado por buscar otros modelos.

Si en el modelo cosmológico de una expansión acelerada se abandona la idea de la constante cosmológica como la energía del vacío, entonces se debe buscar un modelo alternativo que explique dicha expansión acelerada; básicamente hay 2 caminos con este fin. El primer camino es modificando la parte derecha de las ecuaciones de Einstein considerando diferentes formas de  $T_{\mu\nu}$  con presión negativa, teorías de materia modificada (modelos de quintaesencia, k-esencia, modelos de fluidos perfectos y

modelos de campos escalares en física de partículas) [25]. El modelo de quintaesencia hace uso de campos escalares con potenciales de variación lenta mientras que en el modelo de K-esencia es la energía cinética del campo escalar lo que conduce a la aceleración. Los modelos con fluidos perfectos se basan en fluidos con diferentes ecuaciones de estado como el modelo del Gas Chaplyng y sus generalizaciones. El segundo camino para construir un modelo de energía oscura es modificando la parte izquierda de las ecuaciones de Einstein, a este tipo de modelos se les conoce como modelos de Gravedad modificada son los llamados modelos  $f(R)$  (el modelo de  $\Lambda$ ), teorías escalares tensoriales (ejemplo Brans-Dicke) y teorías de Brane [25]. A continuación expondremos con más detalle algunos de los modelos antes mencionados.

## 2.7 Modelo de Quinta esencia

El modelo de quinta esencia, propuesto por Peebles y Ratra consiste en proponer un campo escalar canónico  $\phi$  con un potencial  $V(\phi)$  como responsable de la expansión acelerada en la época actual. Este modelo es descrito por la acción [25]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{16\pi G} R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] + S_M. \quad (2.34)$$

Considerando un fluido perfecto con densidad de energía  $\rho_M$  y presión  $p_M$  el fluido cumple con la condición de continuidad

$$\dot{\rho}_M + 3H(\rho_M + p_M) = 0. \quad (2.35)$$

El tensor de momento-energía para un campo escalar es

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\phi)}{\delta g^{\mu\nu}} = -\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + V(\phi) \right]. \quad (2.36)$$

Así, en la métrica FLRW, la densidad de energía y presión para un campo escalar solo dependiente del tiempo tienen la forma

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (2.37)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2.38)$$

De esta manera, la ecuación de estado correspondiente es

$$\omega_\phi = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}. \quad (2.39)$$

Las ecuaciones de Friedmann para un universo espacialmente plano ( $k = 0$ ) son

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[ \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + \rho_M \right], \quad (2.40)$$

$$\dot{H} = -4\pi G \left[ \dot{\phi}^2 + \rho_M + p_M \right]. \quad (2.41)$$

Variando (2.34) respecto a  $\phi$  se obtiene la ecuación de Klein-Gordon

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.42)$$

El análisis de varias formas para  $V(\phi)$  y sus consecuencias en diferentes épocas se encuentran plasmadas en la literatura, ver [25].

## 2.8 Modelos de K-esencia

A diferencia de los modelos de quinta esencia donde se busca una forma adecuada del potencial para inducir la expansión acelerada, los modelos de K-esencia se basan en utilizar un término cinético no-canónico para el campo  $\phi$  para inducir la expansión acelerada. La forma de acción más general es [25]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} P(\phi, X), \quad (2.43)$$

donde  $P(\phi, X) = p_\phi$  y  $X = -\frac{1}{2} [\nabla\phi]^2$ . El tensor de energía-momento es dado por

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}P)}{\delta g^{\mu\nu}} = -P_{,X} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} P. \quad (2.44)$$

La densidad de energía y el parámetro de la ecuación de estado tienen la forma

$$\rho_\phi = 2XP_{,X} - P, \quad (2.45)$$

$$\omega_\phi = \frac{P}{2XP_{,X} - P}, \quad (2.46)$$

donde cuando  $|2XP_{,X}| \ll |P|$  se cumple que  $\omega_\phi$  se acerca a  $-1$ . Para un universo de FLRW las ecuaciones de movimiento son

$$3H^2 = 8\pi G [\rho_\phi + \rho_M], \quad (2.47)$$

$$2\dot{H} = -8\pi G [2XP_{,X} + \rho_\phi + p_M], \quad (2.48)$$

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) = 0. \quad (2.49)$$

Entre los modelos considerados de tipo K-esencia se encuentran: (i) Teoría de cuerdas efectiva para bajas energías, (ii) modelo "Ghost" condensado, (iii) modelo de

campo Taquiónico y (iv) modelo de teoría Dirac-Born-Infeld (DBI).

## 2.9 Expansión acelerada con un campo fantasma

Los modelos empleando campos fantasma se usan para estudiar el caso donde el valor de la ecuación de estado  $\omega_\phi$  puede tomar valores no solo de  $-1$ , sino también menores. Para lograrlo se impone la condición  $P_{,X} < 0$  en (2.46). Un ejemplo simple es un modelo de  $\phi$  con [25]

$$P(X, \phi) = -X - V(\phi). \quad (2.50)$$

En este caso la densidad de energía y la presión son en este caso dados por

$$\rho_\phi = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (2.51)$$

$$P_\phi = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2.52)$$

La ecuación de estado tiene entonces la forma

$$\omega_\phi = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}, \quad (2.53)$$

que cumple la condición  $\omega_\phi \leq -1$  para  $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 < V(\phi)$ . Para algunos modelos, dependiendo de su potencial, la evolución de su campo escalar puede conducir a un escenario de "big rip", por ejemplo el potencial

$$V(\phi) = V_0 e^{-\mu\phi}, \quad (2.54)$$

con  $\mu$  constante, conduce a que  $w_\phi$  siempre es menor que -1. Este escenario puede evitarse utilizando un potencial de tipo campana como

$$V(\phi) = V_0 e^{-\phi^2/\sigma^2}, \quad V(\phi) = V_0 [\cosh(\beta\phi/m_{pl})]. \quad (2.55)$$

En estos casos de potencial, el valor de la ecuación de estado inicia menor que -1, pero en su evolución se acerca a -1. Lamentablemente este tipo de modelos presentan inestabilidad en el estado vacío del campo [35]. Más aún, las actuales observaciones no los han favorecido y a medida que se obtienen mediciones más precisas de la ecuación de estado  $\omega_\phi$  se ven cada vez menos valores  $\omega_\phi < -1$ , condición necesaria para la viabilidad de estos modelos.

## 2.10 Fluido viscoso en cosmología inflacionaria

En el análisis de la Inflación cósmica, es posible modelar dicha época en términos de un fluido viscoso no-homogéneo. Asumiendo un universo en la métrica FLRW lleno de 2 fluidos acoplados, i. e., materia y energía. Las ecuaciones dinámicas son [36]

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = -Q, \quad (2.56)$$

$$\dot{\rho}_1 + 3H(\rho_1 + p_1) = Q, \quad (2.57)$$

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho + p + \rho_1 + p_1), \quad (2.58)$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_1), \quad (2.59)$$

con  $\rho, p$  densidad de energía y presión de la energía oscura y  $\rho_1, p_1$  densidad de energía y presión de la materia oscura.

Asumiendo la ausencia de masa no relativista, la ecuación para la materia gravitacional es

$$\dot{\rho}_1 + 3H\rho_1 = Q, \quad (2.60)$$

en [36] se consideran 3 diferentes casos de  $w$  y parámetro de viscosidad aparente ( $\xi$ ), a continuación se resumen 2 de ellos como referencia.

a) Fluido con  $w = -\rho/(\rho + \rho_0)$  y viscosidad proporcional a  $H$ . Tomamos a la viscosidad aparente de la forma [37]

$$\xi(H) = f(H)e^{-H/H_f}, \quad (2.61)$$

donde el subíndice ( $f$ ) se refiere al periodo final de la inflación.

Se asume que (2.61) evoluciona lentamente en el tiempo ya que la inflación puede llevarse a cabo cuando la viscosidad es ligera, tomando la forma para  $\omega$

$$p = \omega(\rho)\rho + \xi(H), \quad (2.62)$$

donde

$$\omega = -\frac{\rho}{(\rho + \rho_0)}, \quad (2.63)$$

con  $\rho_* = H_*^2/8\pi G$ . entonces, la ecuación de continuidad (2.56) es

$$\dot{\rho} + 3H\rho[1 + \omega(\rho)] - 3H^2\xi(H) = -Q, \quad (2.64)$$

definimos el radio  $r = \rho_1/\rho$  constante, luego (2.59)

$$\rho = \frac{3H^2}{8\pi G(1+r)}, \quad (2.65)$$

consideramos el acomplamiento [38]

$$Q = 9\delta H^3, \quad (2.66)$$

donde  $\delta$  es una constante positiva. Analizando en el límite asintótico inicial de la inflación  $H/H_* \ll 1$ , entonces en este límite,  $\xi(H) = f(H)$ , tomamos

$$f(H) = \theta H, \quad (2.67)$$

con  $\theta = \frac{3}{8\pi G(1+r)}$  la ecuación de continuidad es

$$\frac{2}{3}\dot{H} + H^2 \frac{\rho_0}{\theta H^2 + \rho_0}, \quad (2.68)$$

con  $\rho_0 = \theta H_{in}^2$ , donde  $H_{in} = H(t_{in})$ ,  $t_{in}$  es el tiempo inicial. El parámetro de Hubble queda

$$H(t) = \left( \sqrt{\tau^2 + 1} - \tau \right) H_{in}, \quad (2.69)$$

con

$$\tau = \frac{3}{4} H_{in} (t - t_{in}), \quad (2.70)$$

a partir de estas expresiones se puede obtener expresiones analíticas para  $\rho(t), \rho_1(t)$  y el parámetro de rodamiento lento ( $\epsilon$ ) en [36].

b) Fluido con  $\omega(\rho) = \omega_0$  constante y la viscosidad proporcional a  $H^2$ . En este modelo se asume que  $\omega(\rho) = \omega_0$  constante, analizando el periodo inicial de la inflación y se toma la forma para viscosidad

$$\xi(H) = f(H) = \hat{\theta} H^2, \quad (2.71)$$

con

$$\hat{\theta} = \frac{1}{8\pi G(1+r)}. \quad (2.72)$$

Asumiendo la forma de  $Q$  igual que el modelo anterior, la ecuación de continuidad

$$\frac{2}{3}\dot{H} + \left(w_0 + \frac{\delta}{\hat{\theta}}\right)H^2 = 0, \quad (2.73)$$

el parámetro de Hubble queda

$$H = \frac{2}{3(w_0 + \delta/\hat{\theta})(t - t_{in}) - 2/H_{in}}. \quad (2.74)$$

En [36] se obtienen las expresiones  $\rho(t)$ ,  $\rho_1(t)$  y el parámetro de rodamiento lento ( $\epsilon$ ).

## 2.11 Fluido viscoso en cosmología de expansión acelerada

El descubrimiento de la expansión acelerada ha motivado la búsqueda de nuevos modelos. Una forma de introducir la expansión es mediante la energía oscura, la cual debe tener una presión negativa caracterizada por  $\omega = p/\rho$ . De acuerdo a los datos observacionales [39], se reporta  $\omega = -1.04^{+0.09}_{-0.10}$ , existen diferentes escenarios para la evolución del universo, de los cuales, en [40] se analizan los escenarios Little Rip, Pseudo Rip y el modelo "bounce", incluyendo los efectos de la viscosidad. Para esto, retomamos las ecuaciones

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = -Q, \quad (2.75)$$

$$\dot{\rho}_1 + 3H(\rho_1 + p_1) = Q, \quad (2.76)$$

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho + p + \rho_1 + p_1), \quad (2.77)$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_1). \quad (2.78)$$

Asumiendo de nuevo ( $w = 0, p_1 = 0$ ), de (2.76) se sigue que

$$\dot{\rho}_1 + 3H\rho_1 = Q. \quad (2.79)$$

A continuación se exponen 2 diferentes modelos para uno de los escenarios mencionados (Little Rip), para los demás escenarios ver [40].

Escenario Little Rip. En este escenario la densidad de energía crece asintóticamente si  $t \rightarrow \infty$  y  $\omega \rightarrow -1^-$ .

a) Caso  $H(t) = H_0 e^{\lambda t}$ ,  $H_0 > 0$ ,  $\lambda > 0$ . Con  $H_0 = H(0)$  y  $t = 0$  es el presente además asumimos  $Q = \delta H \rho_1$  [41], donde  $\delta$  es un escalar constante positiva. Resolviendo (2.79) con estas condiciones se obtiene

$$\rho_1(t) = \rho_0 e^{\left(\frac{\delta-3}{\lambda}\right)Ht}, \quad (2.80)$$

donde  $\rho_0$  es una constante de integración. Si  $\delta < 3$ ,  $\rho_1 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Ahora se considera una ecuación de estado de la forma [42]

$$p = w(\rho)\rho - 3H\xi(H), \quad (2.81)$$

y para el parámetro  $\omega(\rho)$  se asume la forma [42]

$$\omega(\rho) = A_0 \rho^{\alpha-1} - 1. \quad (2.82)$$

La ecuación de continuidad para la energía oscura resulta ser entonces

$$\frac{6h^3}{8\pi G} - \dot{\rho}_1 + 3H [A_0\rho^\alpha - 3H\xi(H)] = -\delta H\rho_1. \quad (2.83)$$

De aquí se obtiene

$$\xi(H) = \frac{2}{3} \frac{\lambda}{8\pi G} + \frac{1}{3H} (\rho_1 + A_0\rho^\alpha), \quad (2.84)$$

con  $\alpha \geq 1$  y  $A \neq 0$ .

b) Caso  $H(t) = H_0 e^{C e^{\lambda t}}$ . En este modelo,  $H_0$ ,  $C$  y  $\lambda$  son constantes positivas. Además, el parámetro de Hubble  $H(t)$  crece más que en el caso anterior; tomando  $Q$  de igual forma y considerando el límite para valores pequeños de  $t$

$$e^{\lambda t} \approx 1 + \lambda t. \quad (2.85)$$

Resolviendo la ecuación de continuidad para la materia oscura obtenemos

$$\rho_1 = \rho_0 e^{(\hat{C} \frac{\delta-3}{\lambda} H)}, \quad (2.86)$$

donde  $\hat{C} = C^{-1} e^C$ . Tomando la misma forma para la ecuación de estado que en el modelo anterior dada por

$$w(\rho) = A_0 \rho^{\alpha-1} - 1. \quad (2.87)$$

De esta ecuación se puede obtener una expresión para la viscosidad aparente  $\xi(H, t)$  descrita en [40].

## Capítulo III

# Fluido cosmológico viscoso autointeractuante desde una teoría escalar-tensorial geométrica de la gravedad

En este capítulo se muestran los resultados principales y originales de esta tesis. En particular construimos un modelo que describe la presente expansión acelerada del universo mediante un fluido oscuro viscoso. El modelo se construye en el marco de una teoría escalar-tensorial geométrica de la gravedad en donde la viscosidad del fluido se origina por la no-canonicidad de la energía cinética de la parte escalar de la gravedad [43].

Comenzaremos este capítulo introduciendo el formalismo correspondiente a la teoría escalar-tensorial geométrica en la que se basa nuestro modelo de fluido oscuro viscoso. Como veremos, a diferencia de una teoría escalar-tensorial tradicional, en esta nueva versión la geometría de fondo no se impone riemanniana sino que se determina que es del tipo Weyl-integrable. Más aun, en esta última el campo escalar tiene una naturaleza meramente gravitatoria al ser un campo geométrico que forma

parte de la estructura afín del espacio-tiempo. Una vez establecido el marco de trabajo construiremos nuestro nuevo modelo cosmológico empleando un fluido oscuro viscoso.

### 3.1 Teoría escalar-tensorial geométrica de gravitación

Iniciaremos considerando una teoría escalar-tensorial en vacío en el marco de Jordan, dada por la acción [22]

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \Phi \mathcal{R} + \frac{\tilde{\omega}(\Phi)}{\Phi} g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} - \tilde{V}(\Phi) \right], \quad (3.1)$$

donde  $\mathcal{R}$  representa el escalar de Ricci,  $\tilde{\omega}$  es una función del campo escalar  $\phi$  y  $\tilde{V}(\phi)$  el potencial escalar. Mediante la transformación de campo  $\varphi = -\ln(G\Phi)$  en (3.1), ésta adquiere la forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( e^{-\varphi} \left[ \frac{\mathcal{R}}{16\pi G} + \frac{1}{2} \omega(\varphi) g^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} \right] - V(\varphi) \right), \quad (3.2)$$

donde hemos considerado  $(1/2)\omega(\varphi) = (16\pi G)^{-1} \tilde{\omega}[\varphi(\Phi)]$  y  $V(\varphi) = (16\pi)^{-1} \tilde{V}(\varphi(\Phi))$ . Aplicando el método variacional de Palatini se obtiene [11]

$$\nabla_{\mu} g_{\alpha\beta} = \varphi_{,\mu} g_{\alpha\beta}. \quad (3.3)$$

La expresión (3.3) se conoce como la condición no-metricidad de una geometría de Weyl-Integrable, la cual es invariante bajo las siguientes transformaciones aplicadas al mismo tiempo

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = e^f g_{\alpha\beta}, \quad (3.4)$$

$$\bar{\varphi} = \varphi + f, \quad (3.5)$$

donde  $f = f(x^\alpha)$  es función continua y diferenciable de las coordenadas del espacio-tiempo. Por otro lado, resulta que aunque la geometría de fondo es de tipo weyl-Integrable la acción (3.2) no es invariante bajo (3.4) y (3.5). Entonces se propone la siguiente acción invariante

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\varphi} \left[ \frac{\mathcal{R}}{16\pi G} + \frac{1}{2} \omega(\varphi) g^{\alpha\beta} \varphi_{;\alpha} \varphi_{;\beta} - V(\varphi) e^{-\varphi} - \frac{1}{4} H_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta} e^{-\varphi} \right], \quad (3.6)$$

donde hemos definido la derivada covariante de norma en el marco de Weyl dada por

$$\varphi_{;\mu} = ({}^{(w)}\nabla_\mu + \gamma B_\mu) \varphi, \quad (3.7)$$

siendo  $B_\mu$  un campo vectorial de norma,  $\gamma$  una constante de acoplamiento imaginaria pura y  $H_{\alpha\beta} = W_{\beta,\alpha} - W_{\alpha,\beta}$  el campo de intensidad asociado al campo de norma  $W_\mu = \varphi B_\mu$ . La invariancia de (3.6) bajo (3.4) y (3.5) requiere que las siguientes reglas de transformación se cumplan

$$\bar{\varphi} \bar{B}_\mu = \varphi B_\mu - \gamma^{-1} f_{,\mu}, \quad (3.8)$$

$$\bar{\omega}(\bar{\varphi}) = \omega(\bar{\varphi} - f) = \omega(\varphi), \quad (3.9)$$

$$\bar{V}(\varphi) = V(\bar{\varphi} - f) = V(\varphi). \quad (3.10)$$

Hasta ahora, la acción que hemos creado y las transformaciones utilizadas han sido formuladas en el marco Weyl, entendiéndose por marco de Weyl al conjunto  $(M, g, \varphi)$  junto con la condición de no-metricidad weylana. En el caso de que  $f = -\varphi$ , se define la métrica efectiva  $\bar{g}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} = e^{-\varphi} g_{\alpha\beta}$  y la ecuación (3.3) adquiere la forma  $\nabla_\lambda h_{\alpha\beta} = 0$ , que corresponde a una geometría de Riemann efectiva. Al conjunto  $(M, h, \bar{\varphi} = 0)$  junto con la condición de metricidad riemanniana se le llama marco de Riemann.

En el marco de Riemann, la acción (3.6) adquiere la forma

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-h} \left[ \frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2} \omega(\phi) h^{\alpha\beta} \mathcal{D}_\alpha \phi \mathcal{D}_\beta \phi - V(\phi) - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right], \quad (3.11)$$

siendo  $\mathcal{D}_\mu = \nabla_\mu + \gamma A_\mu$  la derivada de norma en este marco, donde  $\nabla_\mu$  el operador derivada covariante riemanniano y  $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$ . El campo  $A_\alpha$  es el campo de norma en el marco de Riemann proveniente del campo de norma en el marco de Weyl  $B_\lambda$ . La acción (3.11) es invariante bajo la transformación

$$\tilde{A}_\mu = A_\mu - \gamma^{-1} \sigma_{,\mu}, \quad (3.12)$$

siendo  $\sigma(x)$  una función continua y diferenciable. Esta transformación corresponde a la transformación de norma asociada a los elementos del álgebra del grupo  $U(1)$ , y en este sentido si bien  $A_\mu$  no tiene porqué ser en general solo el campo electromagnético, la transformación (3.12) sugiere que podría en particular considerarse como tal [43].

Si consideramos  $A_\mu$  como el potencial electromagnético, la acción (3.11) se puede generalizar agregando un término fuente para dicho potencial como

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-h} \left[ \frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2} \omega(\phi) h^{\alpha\beta} \mathcal{D}_\alpha \phi \mathcal{D}_\beta \phi - V(\phi) - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - J^\alpha A_\alpha \right], \quad (3.13)$$

donde  $J^\mu$  es un 4-vector de densidad de corriente eléctrica conservada. Variando (3.13) respecto a la métrica, al campo escalar y al potencial electromagnético, se obtienen las siguientes ecuaciones de campo

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G \left[ \omega(\phi) \mathcal{D}_\mu \phi \mathcal{D}_\nu \phi - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} (\omega(\phi) h^{\alpha\beta} \mathcal{D}_\alpha \phi \mathcal{D}_\beta \phi - 2V(\phi)) - \tau_{\mu\nu}^{(em)} \right], \quad (3.14)$$

$$\omega(\phi) \square \phi + \frac{1}{2} \omega'(\phi) h^{\mu\nu} \mathcal{D}_\mu \phi \mathcal{D}_\nu \phi - \gamma \omega'(\phi) A^\mu \phi \mathcal{D}_\mu \phi + \gamma \omega(\phi) \nabla_\mu A^\mu - \gamma^2 \omega(\phi) A^\mu A_\mu \phi + V'(\phi) = 0, \quad (3.15)$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu - \gamma \omega(\phi) h^{\mu\nu} \phi \mathcal{D}_\mu \phi, \quad (3.16)$$

donde  $\square = h^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$  es el operador D'Alambertiano,  $\tau_{\mu\nu}^{(em)} = T_{\mu\nu}^{(em)} - h_{\mu\nu} J^\alpha A_\alpha$ , con  $T_{\mu\nu}^{(em)} = F_{\nu\beta} F_\mu{}^\beta - \frac{1}{4} h_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ .

Por otro lado, la materia se introduce en la teoría a través de una densidad lagrangiana de materia en la acción de la forma

$$S_m = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-2\varphi} L_m(e^{-\varphi} g_{\mu\nu}, \Psi, {}^{(w)}\nabla\Psi), \quad (3.17)$$

donde  $\Psi$  denota los campos de materia. Con esta nueva contribución las ecuaciones de campo (3.14), (3.15) y (3.16) adquieren la forma

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} - 8\pi G \left[ \omega(\phi) \mathcal{D}_\mu \phi \mathcal{D}_\nu \phi - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} (\omega(\phi) h^{\alpha\beta} \mathcal{D}_\alpha \phi \mathcal{D}_\beta \phi - 2V(\phi)) - \tau_{\mu\nu}^{(em)} \right], \quad (3.18)$$

$$\omega(\phi) \square \phi + \frac{1}{2} \omega'(\phi) h^{\mu\nu} \mathcal{D}_\mu \phi \mathcal{D}_\nu \phi - \gamma \omega'(\phi) A^\mu \phi \mathcal{D}_\mu \phi + \gamma \omega(\phi) \nabla_\mu A^\mu - \gamma^2 \omega(\phi) A^\mu A_\mu \phi + V'(\phi) = 0, \quad (3.19)$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu - \gamma \omega(\phi) h^{\mu\nu} \phi \mathcal{D}_\mu \phi. \quad (3.20)$$

donde se ha utilizado

$$\delta \int d^4x \sqrt{-g} e^{-2\varphi} L_m(\varphi, g_{\mu\nu}, \Psi, {}^{(w)}\nabla\Psi) = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-2\varphi} T_{\mu\nu}(\varphi, g_{\mu\nu}, \Psi, {}^{(w)}\nabla\Psi) \delta(e^\varphi g^{\mu\nu}). \quad (3.21)$$

Una vez establecido el formalismo general construiremos nuestro modelo de fluido viscoso en la siguiente sección.

## 3.2 Fluido oscuro viscoso autointeractuante.

Para construir un modelo de expansión acelerada del universo mediante un fluido viscoso, en el contexto de la teoría escalar-tensorial geométrica descrita en la sección anterior, retomamos la acción (3.13). Así, para implementar el principio cosmológico en esta teoría, utilizamos la elección de norma  $\sigma_{,\mu} = \gamma A_{\mu}$  con la cual (3.13) se reduce a

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-h} \left[ \frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2} \omega(\phi) h^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - V(\phi) \right]. \quad (3.22)$$

Las ecuaciones de campo derivadas de esta acción son dadas por

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \left[ \omega(\phi) \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} (\omega(\phi) h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} - 2V(\phi)) \right], \quad (3.23)$$

$$\omega(\phi) \square \phi + \frac{1}{2} \omega'(\phi) h^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + V'(\phi) = 0. \quad (3.24)$$

Como queremos asociar la no-canonicidad del término cinético del campo con la viscosidad del fluido y ésta última debe ser pequeña de acuerdo a las observaciones, entonces resulta conveniente considerar pequeñas desviaciones de la canonicidad de la energía cinética. En otras palabras, asumiremos  $\omega(\phi) = 1 + \epsilon \zeta(\phi)$  donde  $\epsilon \ll 1$  es un parámetro adimensional. De esta manera las ecuaciones (3.23) y (3.24) se transforman en

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \left[ \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} (h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} - 2V(\phi)) + \epsilon \zeta(\phi) \left( \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} \right) \right], \quad (3.25)$$

$$\square \phi + V'(\phi) + \epsilon \left[ \zeta(\phi) \square \phi + \frac{1}{2} \zeta'(\phi) h^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} \right] = 0. \quad (3.26)$$

Se introduce el fluido oscuro viscoso mediante el tensor energía-momento

$$T_{\mu\nu}^{(df)} = (\rho_{df} + p_{df}) U_{\mu} U_{\nu} - p_{df} h_{\mu\nu} + \eta \nabla_{\sigma} U^{\sigma} (h_{\mu\nu} - U_{\mu} U_{\nu}), \quad (3.27)$$

donde  $\eta$  es el coeficiente de viscosidad escalar,  $\rho_{df}$  y  $p_{df}$  son la densidad y presión del fluido oscuro y  $U^\mu = \delta_0^\mu$  es la 4-velocidad en cada punto del fluido medida por una clase de observadores comóviles con el mismo. En analogía con la forma estándar de las ecuaciones de campo de Einstein,  $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$ , de (3.25) se tiene que el tensor de energía-momento asociado al campo escalar se escribe

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}(\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} - 2V(\phi)) + \epsilon\zeta(\phi)\left[\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}\right]. \quad (3.28)$$

Comparando (3.27) con (3.28) y asociando la desviación de la canonicidad de la energía cinética del campo con la parte viscosa del fluido oscuro se llega al sistema

$$(\rho_{df} + p_{df})U_\mu U_\nu - p_{df}h_{\mu\nu} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}(h^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} - 2V(\phi)), \quad (3.29)$$

$$\eta\nabla_\sigma U^\sigma (h_{\mu\nu} - U_\mu U_\nu) = \epsilon\zeta(\phi)\left[\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}\right], \quad (3.30)$$

La traza de (3.30) determina el desvío de la canonicidad de la energía cinética del campo escalar mediante

$$\zeta(\phi) = -\frac{3\nabla_\sigma U^\sigma}{\epsilon\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}}. \quad (3.31)$$

La métrica que, de acuerdo con las actuales observaciones, describe mejor nuestro universo observable en la actualidad es la métrica de FLRW, que puede ser escrita como

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (3.32)$$

donde  $a(t)$  es el factor de escala. Usando (3.32) la ecuación (3.31) se transforma en

$$\zeta(\phi) = -\frac{9\eta H}{\epsilon\dot{\phi}^2}, \quad (3.33)$$

donde  $H = \dot{a}/a$  es el parámetro de Hubble.

Por otro lado, como  $\eta \nabla_\sigma U^\sigma = 3\eta H$ , usando (3.25) y (3.27) podemos escribir

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G [(\rho_{df} + p_{df}) U_\mu U_\nu - p_{df} h_{\mu\nu} + 3\eta H (h_{\mu\nu} - U_\mu U_\nu)]. \quad (3.34)$$

Las ecuaciones de Friedmann derivadas de (3.34) son entonces

$$3H^2 = 8\pi G \rho_{df}, \quad (3.35)$$

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3} (\rho_{df} + 3p_{df} - 9\eta H). \quad (3.36)$$

De la expresión  $\nabla_\alpha T_{(df)}^{\alpha\beta} = 0$ , se sigue que la ecuación de conservación para el fluido viscoso es dada por

$$\dot{\rho}_{df} + 3H (\rho_{df} + p_{df} - 3\eta H) = 0. \quad (3.37)$$

La ecuación de campo (3.26) para la métrica FLRW (3.32) toma la forma

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) + \epsilon \left[ \zeta(\phi) (\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}) + \frac{1}{2} \zeta'(\phi) \dot{\phi}^2 \right] = 0. \quad (3.38)$$

Consideremos ahora que el fluido oscuro es caracterizado por una ecuación de estado

$$\omega_{df}(\rho_{df}) = \frac{p_{df}}{\rho_{df}}, \quad (3.39)$$

y una viscosidad escalar

$$\eta(H) = \alpha H + \beta \frac{\dot{H}}{H}. \quad (3.40)$$

Así, se sigue del sistema (3.35), (3.37), (3.39) y (3.40) la expresión

$$\dot{\rho}_{df} + 3H(1 + \omega_{df})\rho_{df} - 24\pi G \left( \alpha H + \beta \frac{\dot{H}}{H} \right) \rho_{df} = 0. \quad (3.41)$$

Está ecuación determina la dinámica de la densidad de energía del fluido oscuro, que claramente depende de la forma de su ecuación de estado  $\omega_{df}$ . Se dice que el fluido oscuro es autointeractuante porque se permite la interacción entre los dos sectores oscuros (materia oscura y energía oscura) mediante la relación:  $\rho_{dm} = r\rho_{de}$ , donde  $\rho_{dm}$  y  $\rho_{de}$  denotan las densidades de materia oscura y energía oscura, respectivamente. Se permite esta interacción como un intento por resolver el problema de coincidencia cósmica.

### 3.3 Fluido oscuro viscoso con $\omega_{df}$ constante.

Para el caso más simple, consideramos  $\omega_{df} = cte = \omega_0$  y  $r = cte$ , entonces la ecuación (3.41) adquiere la forma

$$\frac{\dot{\rho}_{df}}{\rho_{df}} = - \left[ 3H(1 + \omega_0) - 24\pi G \left( \alpha H + \beta \frac{\dot{H}}{H} \right) \right]. \quad (3.42)$$

Resolviendo (3.42) para  $\rho_{df}(t)$  encontramos

$$\rho_{df}(t) = \rho_{df}^{(0)} \left[ \frac{a_0}{a} \right]^{n_1} \left[ \frac{H}{H_0} \right]^{n_2}, \quad (3.43)$$

donde  $n_1 = -24\pi\alpha G + 3(1 + \omega_0)$  y  $n_2 = 24\pi G\beta$ ,  $H(t_0) = H_0$  y  $a(t_0) = a_0$ . Usando (3.35), (3.43) y la definición  $H$ , se obtiene

$$a(t) = \left[ \frac{n_1\lambda}{2 - n_2} (t - t_0) + a_0^{\frac{n_1}{2-n_2}} \right]^{\frac{2-n_2}{n_1}}, \quad (3.44)$$

con  $\lambda = \left( \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_{df}^{(0)} a_0^{n_1}}{H_0^{n_2}} \right)^{\frac{1}{2-n_2}}$ . La ecuación (3.44) describe la evolución temporal del factor de escala. Sin embargo, considerando que el fluido se compone de dos sectores, energía oscura y materia oscura, y que estos sectores interactúan entre sí, la ecuación

(3.41) nos lleva al sistema

$$\dot{\rho}_{de} + 3H(\rho_{de} + \omega_{de}(\rho_{de})) - 24\pi G\eta\rho_{de} = -Q, \quad (3.45)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m + -24\pi G\eta\rho_m = Q, \quad (3.46)$$

donde  $Q$  es la función de interacción entre ambos sectores. Usando ahora que  $r(t) = \frac{\rho_m(t)}{\rho_{de}(t)}$  el sistema (3.45) y (3.46) se convierte en

$$\dot{\rho}_{de} + \left[ 3H \left( 1 + \frac{\omega_{de}(\rho_{de})}{1+r} \right) + \frac{\dot{r}}{1+r} - 24\pi G\eta \right] \rho_{de} = 0, \quad (3.47)$$

donde hemos empleado que el parámetro EOS para el fluido oscuro puede escribirse como

$$\omega_{df} = \frac{\omega(\rho_{de})\rho_{de}}{1+r}. \quad (3.48)$$

Por lo tanto, la ecuación de Friedmann (3.35) adquiere la forma

$$H^2 = \frac{8\pi G(1+r)}{3} \rho_{de}. \quad (3.49)$$

Resolviendo (3.47) para  $\omega_{de} = \omega_{de}^0$  y  $r = r_0$ , ambas constantes, se obtiene

$$\rho_{de}(t) = \rho_{de}^{(0)} \left[ \frac{a_0}{a} \right]^{n_3} \left[ \frac{H}{H_0} \right]^{n_2}, \quad (3.50)$$

donde  $n_3 = 3 \left[ 1 + \frac{\omega_{de}(\rho_{de})}{1+r} \right] - 24\pi G\alpha$  y  $n_2$  como en (3.43). Con ayuda de (3.49) y (3.50) se obtiene para el factor de escala

$$a(t) = \left( a_0^{\frac{n_3}{2-n_2}} + \frac{n_3\gamma}{2-n_2} (t-t_0) \right)^{\frac{2-n_2}{n_3}}, \quad (3.51)$$

donde  $\gamma = \left( \frac{8\pi G}{3H_0^2} (1+r) \rho_{de}^{(0)} a_0^{n_3} \right)^{\frac{1}{2-n_2}}$ . Se puede observar que (3.51) tiene la misma forma que (3.44) ya que ambas describen la expansión acelerada del universo en la época

actual, aunque, con la diferencia ya mencionada de que la primera toma al fluido como un todo y la segunda como dos sectores del fluido oscuro autointeractuante.

Por otro lado, usando (3.29), en la métrica FLRW (3.32) podemos establecer

$$\rho_{df} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.52)$$

$$p_{df} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.53)$$

Así, se sigue de (3.52), (3.53) y (3.39) que

$$\dot{\phi}^2 = (1 + r + \omega_{de}) \rho_{de}, \quad (3.54)$$

$$V(\phi) = \frac{1}{2} (1 + r - \omega_{de}) \rho_{de}. \quad (3.55)$$

Con ayuda de (3.50), (3.51) y (3.54) puede mostrarse que el campo adquiere la forma

$$\phi(t) = \phi_0 + p_0 \ln [1 + \mu_0(t - t_0)], \quad (3.56)$$

donde

$$p_0 = a_0^{n_3/2} \left( \frac{2 - n_2}{n_3 \gamma} \right) \left( \frac{\gamma}{H_0} \right)^{n_2/2} \sqrt{(1 + r + \omega_{de} \rho_{de}^{(0)})}, \quad (3.57)$$

$$\mu_0 = \frac{n_2 \gamma}{2 - n_2} a_0^{-\frac{n_3}{2 - n_2}}. \quad (3.58)$$

Para calcular el potencial usamos (3.56) y (3.55) obteniendo

$$V(\phi) = V_{0c} \exp \left[ -\frac{2}{p_0} (\phi - \phi_0) \right], \quad (3.59)$$

donde

$$V_{0c} = \frac{1}{2} (1 + r - \omega_{de}) \rho_{de}^0 a_0^{-\frac{n_2 n_3}{2 - n_2}} \left( \frac{\gamma}{H_0} \right). \quad (3.60)$$

Así se sigue de (3.51) que el parámetro de desaceleración actual es dado por

$$q_0 = - \left( 1 + \frac{\dot{H}_0}{H_0^2} \right) = - \left( 1 - \frac{n_3}{2 - n_2} \right), \quad (3.61)$$

que de acuerdo a Planck 2018  $q_0 = -0.5581^{+0.0273}_{-0.0267}$  [44]. De (3.61) y las expresiones para  $n_2$  y  $n_3$  se obtiene que para que el valor de  $q_0$  predicho por nuestro modelo este dentro del rango observacional debe cumplirse que

$$\alpha = \frac{1}{8\pi G} \left( 1 + \frac{\omega_{de}^{(0)}}{1+r} \right) - \frac{1}{12\pi G} (1+q_0)(1-12\pi G\beta). \quad (3.62)$$

Por último, se sigue de (3.33) que la función de no-canonicidad tiene la forma

$$\zeta(\phi) = - \frac{9\eta\gamma}{\epsilon p_0^2 \mu_0^2} \frac{\exp\left(\frac{2}{p_0}(\phi - \phi_0)\right)}{a_0^{\frac{n_3}{2-n_2}} + \frac{n_3\gamma}{(2-n_2)\mu_0} \left(\exp\left[\frac{(\phi-\phi_0)}{p_0}\right] - 1\right)}. \quad (3.63)$$

Por tanto  $\omega(\phi) = 1 + \epsilon\zeta(\phi)$  se escribe

$$\omega(\phi) = 1 - \frac{9\eta\gamma}{p_0^2 \mu_0^2} \frac{\exp\left(\frac{2}{p_0}(\phi - \phi_0)\right)}{a_0^{\frac{n_3}{2-n_2}} + \frac{n_3\gamma}{(2-n_2)\mu_0} \left(\exp\left[\frac{(\phi-\phi_0)}{p_0}\right] - 1\right)}. \quad (3.64)$$

Esta última expresión nos indica que puede obtenerse un fluido oscuro viscoso desde una teoría-escalar tensorial geométrica de la gravedad, en donde la viscosidad tiene su origen en la no-canonicidad de la energía cinética del campo. En particular el modelo que cumple con tales requisitos es el correspondiente a un  $\omega(\phi)$  dado por (3.64) en la acción (3.22). En la siguiente sección abordaremos un caso más realista al considerar que nuestro universo tiene una temperatura y por lo tanto una entropía asociadas. Este hecho, natural en un fluido viscoso, se considera al incluir una ecuación de estado termodinámica.

### 3.4 Fluido oscuro viscoso con una ecuación de estado termodinámica.

Ahora, consideramos una ecuación de estado termodinámica para el fluido oscuro de la forma [42, 45]

$$\omega_{de}(\rho_{de}) = A\rho_{de}^{n-1} - 1, \quad (3.65)$$

con  $n > 1$  y siendo  $A$  un parámetro constante. Sustituyendo (3.65) en (3.41) se obtiene

$$\dot{\rho}_{de} + \left[ 3H \left( 1 - \frac{1}{1+r} \right) + \frac{\dot{r}}{1+r} - 24\pi G\eta \right] \rho_{de} + \frac{3AH}{1+r} \rho_{de}^n = 0. \quad (3.66)$$

La ecuación (3.66) es una ecuación diferencial de tipo Bernoulli para  $\rho_{de}$ , cuya solución es dada por la fórmula

$$\rho_{de}(t) = \frac{(3A(n-1))^{-\frac{1}{n-1}} H^{n_2}}{1+r} a^{3-24\pi G\alpha} \exp\left(3 \int_{t_1}^t \frac{H}{1+r} dt\right) \times \left[ \int_{t_1}^t (1+r)^{-n} a^{-(n-1)(3-24\pi G\alpha)} H^{1+n_2(n-1)} \exp\left(3(n-1) \int_{t_1}^t \frac{H}{1+r} dt\right) \right]^{-\frac{1}{n-1}}. \quad (3.67)$$

Para obtener una solución explícita a partir de (3.67) se debe tener en cuenta la siguiente información:

1) El valor actual de la razón  $r = \rho_{m0}/\rho_{de0} \sim \mathcal{O}(1)$ , es decir, ambas densidades están relacionadas por un factor no mucho mayor a la unidad, llamado, el problema de la coincidencia cosmológica, (sección 2.4), y además, el caso  $r = 1$  no hace mucho tiempo estuvo presente,  $z \approx 0.55$  [46], así que podemos asumir que el cambio de  $r$  es lo suficientemente lento como para considerarlo como una constante, i. e.,  $\dot{r} \approx 0$ .

2) En la ecuación (3.40), se asume que la viscosidad depende en mayor medida

del valor de  $H$  y no de  $\dot{H}$ , entonces se toma  $\beta \ll 1$ .

Con estos dos condiciones, la ecuación (3.67) nos lleva a

$$\rho_{de} = \rho_{de}^{(0)} \left[ \left( \frac{a}{a_i} \right)^{n_A} - 1 \right]^{-\frac{1}{n-1}}, \quad (3.68)$$

donde  $\rho_{de}^{(0)} = [3A(n-1)/(n_A(1+r))]^{-1/(n-1)}$  y  $n_A = (n-1)[3(1-1/(1+r)) - 24\pi G\alpha]$ .

Con esta última ecuación y (3.49) obtenemos para el factor de escala la expresión

$$a(t) = a_1 [1 + \lambda_0(t - t_i)]^{\frac{2(n-1)}{n_A}}, \quad (3.69)$$

con  $\lambda_0 = \frac{n_A}{2(n-1)} \sqrt{\frac{8\pi G}{3}(1+r)\rho_{de}^{(0)}}$ . En el caso  $\lambda_0(t - t_0) \gg 1$  la densidad de energía de la energía oscura se reduce a

$$\rho_{de}(t) = \frac{\rho_{de}^{(0)}}{\lambda_0^2} \frac{1}{(t - t_i)^2}. \quad (3.70)$$

Entonces, usando (3.65) y (3.54) se llega a

$$\dot{\phi}_{de} = \sqrt{r\rho_{de} + A\rho_{de}^n}. \quad (3.71)$$

Para  $t \gg t_i$  y usando la fórmula de aproximación  $(1+x)^n \simeq 1+nx$ , la solución para (3.71) se escribe

$$\phi(t) = \phi_i + \sqrt{r\rho_{de}^{(0)}\lambda_0^{-2}} \ln\left(\frac{t}{t_i}\right). \quad (3.72)$$

Por otra parte, usando las ecuaciones (3.55), (3.65) y (3.70), el potencial  $V(t)$  adquiere la forma

$$V(t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{(2+r)\rho_{de}^{(0)}\lambda_0^{-2}}{(t-t_i)^2} - \frac{A(\rho_{de}^{(0)})^n \lambda_0^{-2n}}{(t-t_i)^{2n}} \right]. \quad (3.73)$$

Así, cuando  $t \gg t_i$  el potencial en función de  $\phi$  tiene la forma

$$V(\phi) = \frac{(2+r)\rho_{de}^{(0)}\lambda_0^{-2}}{(t-t_i)^2} \exp\left[-\frac{2\lambda_0}{\sqrt{r\rho_{de}^{(0)}}}(\phi-\phi_i)\right] - \frac{A(\rho_{de}^{(0)})^n}{2\lambda_0^{2n}t_i^{2n}} \exp\left[-\frac{2n\lambda_0}{\sqrt{\rho_{de}^{(0)}}}(\phi-\phi_i)\right]. \quad (3.74)$$

Con ayuda de (3.69) el parámetro de desaceleración  $q_0$  es dado por la expresión

$$q_0 = -\left(1 - \frac{n_A}{2(n-1)}\right). \quad (3.75)$$

Se sigue de (3.75) y usando la definición de  $n_A$  que la condición para que el parámetro de desaceleración obtenido es

$$\alpha = \frac{1}{8\pi G} \left(1 - \frac{1}{1+r}\right) - \frac{1}{12\pi G} (1+q_0). \quad (3.76)$$

De esta manera  $q_0$  es acorde a los resultados observacionales de la colaboración Planck 2018 [44]. Por último, la expresión para el parámetro de no-canonicidad de (3.33) resulta ser

$$\zeta(\phi) = -\frac{18\eta(n-1)\lambda_0^3 t_i^2}{\epsilon r \rho_{de}^{(0)} n_A} \left[ \frac{\exp\left[-\frac{2\lambda_0}{\sqrt{r\rho_{de}^{(0)}}}(\phi-\phi_i)\right]}{1 + t_i \lambda_0 \left(\exp\left[-\frac{2n\lambda_0}{\sqrt{\rho_{de}^{(0)}}}(\phi-\phi_i)\right] - 1\right)} \right]. \quad (3.77)$$

Por lo tanto de la fórmula  $\omega(\phi) = 1 + \epsilon\zeta(\phi)$  se sigue que

$$\omega(\phi) = 1 - \frac{18\eta(n-1)\lambda_0^3 t_i^2}{r \rho_{de}^{(0)} n_A} \left[ \frac{\exp\left[-\frac{2\lambda_0}{\sqrt{r\rho_{de}^{(0)}}}(\phi-\phi_i)\right]}{1 + t_i \lambda_0 \left(\exp\left[-\frac{2n\lambda_0}{\sqrt{\rho_{de}^{(0)}}}(\phi-\phi_i)\right] - 1\right)} \right]. \quad (3.78)$$

Al igual que en el caso anterior, la expresión (3.78) nos indica que es posible obtener una descripción unificada de un fluido viscoso cosmológico para un universo descrito con una ecuación de estado termodinámica solo que con  $\omega(\phi)$  dada por (3.78).

# Conclusiones

En esta tesis doctoral se investigó la posibilidad de describir la presente época de expansión acelerada del universo modelándola mediante un fluido oscuro viscoso autointeractuante. El modelo fue construido en el marco de una teoría-escalar tensorial geométrica de la gravedad. Este tipo de teorías se diferencian de las teorías escalares-tensoriales típicas porque su geometría de fondo es dada por el principio variacional de Palatini, determinando con esto que la geometría de fondo de ese tipo de teorías es en general del tipo Weyl-integrable y no riemanniana como en las teorías usuales. En este sentido el campo escalar que aparece en la formulación tiene un origen geométrico al ser parte de la estructura afín del espacio-tiempo. La importancia de esta investigación radica no solo en el hecho de tener una descripción unificada del sector oscuro gravitacional, sino que además intenta resolver un problema hasta hoy abierto en cosmología, a saber, el origen y dinámica de la presente expansión acelerada del universo.

En el modelo, se considera un fluido oscuro autointeractuante lo que significa que la materia y la energía oscuras interactúan una con la otra. Esta consideración obedece a que se pretende que el modelo incluya también una propuesta para resolver el problema de coincidencia cósmica. En este modelo la gravedad tiene dos aspectos

tos: uno tensorial como el de la teoría de la relatividad general y otro adicional de naturaleza escalar. Además, el campo escalar se caracteriza por tener una energía cinética descrita por un término a nivel de acción no-canónico. Esa no-canonicidad es descrita por la función  $\omega(\phi)$ . Cómo nos enfocamos en un modelo realista que contempla que el universo tiene una temperatura, y por tanto una entropía, entonces dada la asociación entre la viscosidad y la parte no-canónica del campo escalar se asume que  $\omega(\phi) = 1 + \epsilon\zeta(\phi)$  donde  $\epsilon \ll 1$  es un parámetro adimensional. La idea es que la no-canonicidad del campo sea pequeña pues observacionalmente la viscosidad observada en el universo es pequeña. Cabe aclarar que cuando  $\omega(\phi) = 1$  la energía cinética del campo es canónica.

La ecuación de estado del fluido oscuro determina el tipo de fluido. El más simple es cuando el parámetro de la ecuación de estado es constante. En este caso el modelo se considera no realista sino un modelo de juguete, pues en presencia de viscosidad se espera que el fluido se caliente y por tanto se genere una entropía. De ahí que lo más natural en ese caso sería que el estado del fluido, es decir, su relación entre su presión y su densidad no se mantenga uniforme. Y en ese sentido el caso más realista es cuando se considera la ecuación de estado termodinámica que contempla la entropía del universo [42, 45]. Por otro lado, como en nuestro caso tenemos en realidad un 2-fluido, es decir, un fluido con dos componentes: materia y energía oscuras, también se tiene una ecuación de estado particular para cada una de las componentes. Además, como también consideramos interacción entre los sectores oscuros, entonces la ecuación de estado del fluido también tiene esa información, en particular, del cociente entre la densidad de materia oscura y de energía oscura, que

es un observable cosmológico.

En esta tesis presentamos ambos casos de ecuaciones de estado para el fluido oscuro, y es notorio que el potencial obtenido sea decreciente para los dos casos. Esto físicamente tiene sentido pues el potencial representa la densidad de energía asociada a la energía oscura y dado que hay presente una interacción viscosa con la materia oscura, entonces la energía una parte se disipa por la viscosidad y la otra acelera la expansión del universo. Sin embargo, el hecho de que el potencial sea decreciente implica que en determinado tiempo la energía que genera la aceleración en la expansión podría terminarse, dependiendo de la viscosidad. Pero como la viscosidad es pequeña no esperamos que esto ocurra pronto. En nuestro modelo la viscosidad es dada por  $\eta \simeq \alpha H$ , donde  $\alpha$  es determinado para el modelo termodinámico por la ecuación (3.76). Observacionalmente sabemos que los parámetros de densidad para materia oscura y energía oscura toman valores  $\omega_{dm} \simeq 0.3$  y  $\Omega_{de} \simeq 0.7$ , respectivamente. De esta manera  $r = \Omega_{dm}/\Omega_{de} \simeq 0.42$ . Para este valor de  $r$ , en unidades naturales ( $c = 1, \hbar = 1$ ), se sigue de (3.76) que  $\alpha \simeq 6.2 \times 10^{-19} m^{-1}$ , donde hemos usado  $G = M_p^{-2}$  con  $M_p = 2.17 \times 10^{-8} kg$ . De esta manera de acuerdo a nuestro modelo la viscosidad escalar predicha es  $\eta \simeq 4.17 \times 10^{-17}$  para el parámetro de Hubble actual  $H_0 = 67.4 \pm 0.5 km/seg Mpc^{-1}$  [44]. Sin embargo, de los experimentos CMB + SNIa + BAO + CC + L se tiene que  $0 < \eta \lesssim 0.00375$  [47]. De ahí que puede verse que la predicción de nuestro modelo es totalmente compatible con las observaciones.

El parámetro de desaceleración en un modelo cosmológico nos determina la cantidad de aceleración que el modelo está prediciendo. De acuerdo a los resultados del

satélite Max Planck 2018  $q_0 = -0.558^{+0.0273}_{-0.0267}$  [44]. En conclusión, dado que el parámetro de desaceleración en nuestro modelo es compatible con las observaciones, siempre y cuando  $\alpha$  este dado por la ecuación (3.76), y como el valor de  $\alpha$  lleva a un valor de la viscosidad compatible también, entonces podemos decir que es posible modelar un fluido cosmológico oscuro viscoso en la época de expansión acelerada mediante un campo escalar, en donde los efectos de la viscosidad son resultado de una desviación respecto a la canonicidad en el término cinético del campo a nivel de acción, en el marco de Riemann de una teoría escalar-tensorial geométrica de la gravedad. Además, el hecho de unificar el fluido oscuro viscoso mediante un campo escalar abre la posibilidad de unificar el periodo presente de expansión acelerada con la inflación de Higgs en el contexto de una teoría geométrica escalar-tensorial invariante de gravitación. Esto significaría que tal vez la energía que acelera la expansión del universo también podría estar vinculada con la energía del campo de Higgs, que hasta la actualidad es el único campo escalar del que se tiene evidencia observacional.

# Bibliografía

- [1] Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte, 1915 (parte 1), 315. Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte, 1915 (parte 2), 778–786, 799–801. Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte, 1915 (parte 3), 831–839. *Annalen der Physik* (ser. 4), 49, 769–822.
- [2] Friedmann, Alexander (1922). «Über die Krümmung des Raumes». *Zeitschrift für Physik A* 10: 377-386. 0939-7922.
- [3] Lemaître, G. (April 1927). "Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques". *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* (in French). 47: 49.
- [4] A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae Hubble, Edwin. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Volume 15, Issue 3, pp. 168-173. DOI: 10.1073/pnas.15.3.168.
- [5] Riess, A., et al. (1998) Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant, *Astronomical Journal*, 116, 1009-1038.
- [6] Perlmutter, S., et al. (1999) Measurement of  $\Omega$  and  $w$  from 42 High-Redshift Supernovae, *Astrophysical Journal*, 517, 565-586.

- [7] Perlmutter, S. and Schmidt, B.P. (2003) Measuring Cosmology with Supernovae, Lecture Notes in Physics, <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0303428>.
- [8] T. S. Almeida, M. L. Pucheu, C. Romero, J. B. Formiga, Phys. Rev.D 89 (2014) no6, 064047.
- [9] M. L. Pucheu, T. S. Almeida, C. Romero, Astrophysics Space Sci. Proc. 38 (2014) no1, 33-41.
- [10] Carroll S., "Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity". Pearson (2003).
- [11] D'Inverno R. Introducing Einstein's Relativity. Clarendon Press; Edición: Illustrated (9 de agosto de 1990).
- [12] Jackson J. D., "Classical Electrodynamics". 3rd Edition, John Wiley & Sons (1999).
- [13] Gron O., Hervik S., Einstein's general theory of relativity. Springer (2008).
- [14] Wald R. M. General Relativity. The University of Chicago Press (1984).
- [15] B. O'Neill, Semi-Riemannian geometry, Academic Press Inc., 1983.
- [16] Israel Quiros, Ricardo García-Salcedo, Tame Gonzalez, F. Antonio Horta-Rangel, Joel Saavedra. Brans-Dicke Galileon and the Variational Principle. DOI: 10.1088/0143-0807/37/5/055605 arXiv:1605.00326v2 [gr-qc].
- [17] Weyl, Hermann, Sitz. Königlich Preußischen Akademie Wiss. (1918) 465; H. Weyl, Ann. d. Physik (4) 59, (1919) 101; H. Weyl, Gött. Nachr. (1921) 99; H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, Springer, Berlin, (1919-1923).

- [18] Hermann Weyl, *Math. Zeitschr.*, 2 (1918b) 384.
- [19] C. Romero, J. B. Fonseca-Neto, M. L. Pucheu. *General Relativity and Weyl Geometry*, arXiv:1201.1469 [gr-qc].
- [20] For a clear and pedagogical explanation of the second clock effect, see R. Penrose, *The Road to Reality*, Ch. 19 (Jonathan Cape, London, 2004).
- [21] Brans C. H. and Dicke R. H.(1961) *Phys. Rev.* 124,925.
- [22] Faraoni V., “*Cosmology in Scalar-Tensor Gravity*”. Kluwer Academic Press (2004).
- [23] Einstein, A., Prussian Academy of Sciences, part 1, 142, 1917.
- [24] E. Komatsu et al., *Astrophys. J. Suppl.* 180, 330 (2009).
- [25] Amendola L., Tsujikawa S., “*Dark Energy. Theory and observations*”. Cambridge University Press (2010).
- [26] Zwicky, F., *On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae*, *Astrophys. J.*, 86, 217, 1937.
- [27] Rubin, V. C., Ford, W. K. Jr. and Thonnard, N., *Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 /R = 4kpc/ to UGC 2885 /R = 122kpc/*, *Astrophys. J.*, 238, 471, 1980.
- [28] Kenath A., Gudenavvar S. B., Sivaram C.. “*Dark matter, dark energy, and alternate models: A review*”. arXiv:1704.06155v1 [physics.gen-ph].

- [29] Jungman, G., Kamionkowski, M. and Griest, K., Supersymmetric Dark Matter, Phys. Rep., 267, 195, 1996.
- [30] Ellis, J. et al., Supersymmetric Relics from the Big Bang, Nucl. Phys. B, 238, 453, 1984.
- [31] McGuire, P. C. and Steinhardt, P. J., Cracking Open the Window for Strongly Interacting Massive Particles as the Halo Dark Matter, preprint, arXiv:astro-ph/0105567v1, 2001.
- [32] Byrne, M., Kolda, C. and Regan, P., Bounds on charged, stable superpartners from cosmic ray production, Phys. Rev. D, 66, 075007, 2002.
- [33] Peccei, R. D. and Quinn, H. R., CP Conservation in the Presence of Pseudoparticles, Phys. Rev. Lett., 38, 1440, 1977
- [34] Carr, B., Kühnel, F. and Sandstad, M., Primordial black holes as dark matter, Phys. Rev. D, 94, 083504, 2016. Astrophys. J. Lett., 325, L17, 1988.
- [35] S.M.Carroll,M.Hoffman,andM.Trodden.“Can the dark energy equation-of-state parameter  $w$  be less than  $-1$ ?”, Phys. Rev. D 68 (2003), 023509.
- [36] I. Brevik, A. V. Timoshkin. “Viscous Coupled Fluids in Inflationary Cosmology”, arXiv:1509.06995v3 [gr-qc].
- [37] R. Myrzakulov and L. Sebastiani, Astrophys. Space Sci. 356, 205 (2015) [arXiv:1410.3573v2 [gr-qc]].
- [38] Yu.L. Bolotin, A. Kostenko, O.A. Lemets, and D.A. Yerokin, Int. J. Mod. Phys. D 24, 1530007 (2015) [arXiv: 1310.0085v2 [astro-ph. CO]].

- [39] Nakamura, K. et al. [Particle Data Group Collaboration]: Review of Particle Physics. *J. Phys. G* 37, 075021 (2010).
- [40] Brevik I., Obukhov V. V., Timoshkin A. V., "Dark Energy coupled with dark Matter in Viscous Fluid Cosmology", *Astrophysics and space Science Journal*, 355, 399-403 (2015) arXiv:1410.2750v1 DOI: 10.1007/s10509-014-2163-9.
- [41] Nojiri, S., Odintsov, S. D.: *Phys. Rept.* 505, 59 (2011), arXiv:1011.0544; *Int.J.Geom.Meth.Mod.Phys.* 4, 115(2007), hep-th/0601213.
- [42] S. Myrzakul, R. Myrzakulov, L. Sebastiani, *Astrophys. Space Sci.* 350 (2014) 350. arXiv:1311.6939 [gr-qc].
- [43] Madriz Aguilar J.E., Montes M. "Interacting quintessence from new formalism of gravitoelectromagnetism formulated on a geometrical scalar-tensor gauge theory of gravity". arxiv:1703.05649v3 [gr-qc].
- [44] N. Aghanim et al., (Planck Collaboration) (2018). arXiv:1807.06209.
- [45] R. Mirzakulov, L. Sebastiani, *Astrophys. Space Sci.* 352. (2014) 281. arXiv:1403.0681 [gr-qc].
- [46] H. E. S. Velten, R. F. Vom Martens, W. Zimdahl, *Eur. Phys. J. C* 74 (2014) 11, 3160. ArXiv: astrophCO/1410.2509.
- [47] Deng Wang, Yang-Jie Yan, Xin-He Meng, *Eur. Phys. J. C* **77** (2017) 660.