



Ameca, Jalisco a 28 de Junio de 2022.

**Junta Académica del Programa  
Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas  
del Centro Universitario de los Valles**

**Presente:**

En mi carácter de director del trabajo recepcional titulado: **Inflación tipo Higgs en una Geometría de Weyl-Integrable**", que presenta la **Mtra Elizabeth Acéves Fernández** con código **304537491**, expongo que lo he revisado y que a mi juicio cumple con los requisitos metodológicos y de contenido, para que pueda ser sometida al examen recepcional correspondiente al Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas con Orientación en Matemáticas

Por lo antes expuesto, me permito emitir el presente oficio de liberación del trabajo recepcional, con la finalidad de que pueda llevarse a cabo la defensa del mismo.

**Atentamente:**

**"Piensa y Trabaja"**

*"2022, Guadalajara, hogar de la Feria Internacional del Libro y Capital Mundial del Libro"*

Ameca, Jalisco a 28 de junio de 2022

---

Dr. Jose Edgar Madriz Aguilar  
Profesor investigador  
CUValles-UdeG



# UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

Centro Universitario de los Valles

COORDINACIÓN DEL DOCTORADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Oficio DCFM/210/2022

Mtro. Abraham Vega Tapia.  
Coordinador Control Escolar  
CUVALLES  
PRESENTE

At'n Raúl Antonio Verdín Arreola  
Jefe de Unidad de Atención y Egreso

Por este medio se hace de su conocimiento que el trabajo de tesis titulado "*Inflación tipo Higgs en una geometría de Weyl integrable*", presentado por la alumna Mtra. Elizabeth Aceves Fernández con código **304537491**, para obtener el grado académico de Doctora en Ciencias Físico Matemáticas con orientación en Matemáticas **SI CUMPLE** con los requerimientos establecidos en el Reglamento General de Posgrado, para su presentación del examen de grado, según consta en el acta *DCFM/008/2022* de sesión de la Junta Académica, celebrada el 23 de junio de 2022. Por tal motivo, le informamos que el examen de grado se efectuará el día viernes **15 de julio de 2022** a las **10:00 hrs** en la sala de Juntas del Departamento de Matemáticas del Centro Universitario de Ciencias Exactas, CUCEI. Al respecto le solicitamos atentamente la elaboración del acta correspondiente. Asimismo, le comunico sobre la designación del jurado de examen de grado.

Dr. Fermín Acéves de la Cruz (Presidente)  
Dr. Juan Antonio Licea Salazar (Secretario)  
Dr. Alonso Castillo Ramírez (Vocal)  
Dra. Mariana Sarahí Montes Navarro (Vocal)  
Dr. José Edgar Madriz Aguilar (**Director**) (Vocal)

Le agradezco su atención y me pongo a sus órdenes para cualquier información adicional.

Atentamente:  
"Piensa y Trabaja"

"2022. Guadalajara, hogar de la Feria Internacional del Libro y Capital Mundial del Libro"  
Ameca, Jalisco a 28 de junio de 2022

Dr. Marciano Sanchez Tizapa  
Coordinador del Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas



UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA  
C. UNIVERSITARIO  
DE LOS VALLES  
Coordinación de Doctorado  
en Ciencias Físico Matemáticas



Vo.Bo. Dra. Suhey Ayala Ramírez  
Coordinadora de Posgrado

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA  
C. UNIVERSITARIO  
DE LOS VALLES

Coordinación de Posgrado

c.c.p Expediente

Carretera Guadalajara-Ameca Km. 45.5. C.P. 46600 Apartado Postal N° 200  
Ameca, Jalisco, Mexico. Tels. 01 [375] 75 80 500/148 Ext. 47255  
[www.cuvalles.udg.mx](http://www.cuvalles.udg.mx)



# UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

Centro Universitario de los Valles

COORDINACIÓN DEL DOCTORADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Folio CUV/ DCFM/208/2022

ASUNTO: Carta de revisión anti-plagio  
de trabajos recepcionales

## H. Miembros de la Junta Académica del Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas

Presente

Por este medio, me permito hacer de su conocimiento que el trabajo recepcional titulado **"Inflación tipo Higgs en una geometría de Weyl integrable"**, realizado por la alumna **Mtra. Elizabeth Aceves Fernández** con código **304537491** del Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas con orientación en Matemáticas, fue revisado de manera previa a su presentación y defensa ante el jurado correspondiente, a través de la herramienta anti-plagio denominada Turnitin.

Con base en la revisión realizada por el director del trabajo recepcional y el análisis del reporte de las similitudes encontradas por dicho software, no se identificaron elementos originales contenidos en alguna obra de terceros que se hagan pasar como propios por el autor del trabajo recepcional <sup>1</sup>.

Por ello, se considera que el trabajo recepcional presentado es resultado del esfuerzo individual de su autor y que este empleó las normas y protocolos de citación pertinentes en su desarrollo, por lo cual, se presume que no infringe derechos intelectuales de terceros.

Sin otro particular por el momento, me despido con un cordial saludo.

A t e n t a m e n t e:

"Piensa y Trabaja"

*"2022, Guadalajara, hogar de la Feria Internacional del Libro y Capital Mundial del Libro"*

Ameca, Jalisco a 23 de junio de 2022

**Dr. Marciano Sanchez Tizapa**

Coordinador del Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas



**UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA**  
**C. UNIVERSITARIO**  
**DE LOS VALLES**  
**Coordinación de Doctorado**  
**en Ciencias Físico Matemáticas**

<sup>1</sup> Si bien el plagio como vulneración a los derechos intelectuales no se encuentra previsto en la legislación penal o en materia de propiedad intelectual, para efectos de su comprensión se recurre a la opinión doctrinista argentina Delia Lipszyc, quién señala se refiere al plagio como "el apoderamiento ideal de todos o de algunos elementos originales contenidos en la obra de otro autor presentándolo como propios". (Ref. Lipszyc Delia, cit. pos. Timal López Sandra y Sánchez Espinoza, Francisco, El plagio en el contexto del derecho de autor, Revista "Tla-melaua" de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (online), 2017, vol. 11, n 42, pp 48-66. Disponible en [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_abstract&pid=S1870-69162017000200041851img=es&nrm=iso](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S1870-69162017000200041851img=es&nrm=iso)

# UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA CENTRO UNIVERSITARIO DE LOS VALLES



Inflación tipo Higgs en una geometría de Weyl integrable

Tesis para obtener el título de

Doctora en Ciencias Físico Matemáticas con Orientación en Matemáticas

Presenta:

M.C. Elizabeth Aceves Fernández

Director:

Dr. José Edgar Madriz Aguilar

Ameca, Jalisco. Julio de 2022

# Índice general

Introducción . . . . .	4
<b>1. Inflación del Universo Temprano</b>	<b>7</b>
1.1. Introducción. . . . .	7
1.2. Problemas del modelo de la gran explosión. . . . .	7
1.3. Ecuaciones de Campo en Inflación . . . . .	14
1.4. Parámetros de Rodadura Lenta. . . . .	17
1.5. Modelo de Inflación Caótica. . . . .	20
1.6. Índice espectral y cociente escalar-tensorial. . . . .	22
<b>2. Geometría de Weyl-Integrable</b>	<b>25</b>
2.1. Introducción. . . . .	25
2.2. Metricidad en Geometría Riemanniana. . . . .	26
2.3. Compatibilidad en una Geometría de Weyl-Integrable. . . . .	33
2.4. Conexión de Weyl. . . . .	36
2.5. Teorías escalares-tensoriales de Gravitación. . . . .	37
2.6. Geometría de fondo de una teoría escalar-tensorial. . . . .	41
<b>3. Modelo de Inflación Tipo Higgs</b>	<b>43</b>
3.1. Introducción. . . . .	43
3.2. Ecuaciones de campo en una geometría de Weyl-Integrable . . . . .	43
3.3. Ecuaciones de Campo para la métrica invariante . . . . .	46

---

3.4. Ecuaciones dinámicas para el modelo de inflación tipo Higgs . . . . .	47
3.5. Soluciones a escala cosmológica . . . . .	50
3.6. Soluciones a escala cuántica . . . . .	52
3.7. El espectro y los observables inflacionarios . . . . .	53
<b>4. Conclusiones</b>	<b>55</b>

---

## Agradecimientos

Antes que nada agradezco a mi director de tesis el Dr. José Edgar Madriz Aguilar por su tiempo y apoyo en mi formación académica. El compartir sus conocimientos me llevo con seguridad en todo el proceso. Agradezco el crecimiento que he obtenido a nivel personal e intelectual al haber trabajado con él, pues es una excelente persona y gran investigador que admiro y respeto.

Agradezco a mi familia que siempre ha estado incondicionalmente, apoyándome ante cualquier circunstancia. Gracias a su apoyo estoy logrando esta meta en mi vida. También agradezco a la Universidad de Guadalajara por haber sido mi casa de estudios y a cada uno de mis profesores.

---

## Introducción

El concepto de inflación es parte fundamental del modelo cosmológico estándar actual. Sin embargo, a pesar del éxito de inflación para resolver los problemas del modelo de la gran explosión y en proporcionar un mecanismo para la generación de las semillas de la posterior formación de estructura, no se cuenta aun con un modelo inflacionario del universo temprano libre de problemas y universalmente aceptado. Otro aspecto interesante es que el único campo escalar con el que el campo inflatón puede ser identificado en el contexto de la física de partículas es el campo de Higgs, pues el bosón de Higgs es la única partícula escalar de la cual se tiene evidencia. En la literatura pueden encontrarse modelos de inflación en los que el inflatón está mínimamente acoplado a la gravedad y modelos en donde se asume un acoplamiento. A lo largo de los años los modelos con acoplamiento mínimo han sido beneficiados por las observaciones debido a que tienen menor cantidad de parámetros a especificar que los modelos donde se exhibe un acoplamiento distinto. Sin embargo, la principal dificultad con los modelos de inflación en donde el campo de Higgs se identifica con el inflatón, conocidos como inflación tipo Higgs, es en un modelo con acoplamiento mínimo no es posible generar con el campo de Higgs la cantidad de inflación suficiente para lograr resolver los problemas del modelo de la gran explosión. De ahí que cuando se habla de un modelo de inflación tipo Higgs se asume de entrada que se trata de un modelo con acoplamiento no-mínimo. Desde la década de los 80's se conoce que la viabilidad de los modelos inflacionarios se ve profundamente afectada por el valor del parámetro de acoplamiento entre el campo escalar y el escalar de curvatura de Ricci en la acción de la teoría [1, 2, 3, 4]. En teoría cuántica de campos en espacios-tiempo curvos se sostiene el argumento de que para espacios-tiempo con altos valores de curvatura se espera un acoplamiento no-mínimo. En general el acoplamiento es expresado mediante un parámetro, y ese parámetro en los modelos inflacionarios es considerado un parámetro libre a priori que generalmente se especifica cuando se comparan las predicciones del modelo con las evidencias observacionales. Como mencionamos antes, se ha considerado en cosmología la idea de que el inflatón puede ser el mismo campo de Higgs [5]. Sin embargo, todos los



---

parámetros asociados al campo de Higgs son determinados a escalas de energía del orden de TeV's, mientras que para tener un modelo inflacionario exitoso se requiere de una escala de energía asociada al inflatón del orden de  $10^{13}$  GeV, lo cual representa un problema serio. Precisamente, para intentar resolver este problema es que se proponen modelos con acoplamiento no-mínimo para inflación tipo Higgs [6, 7, 8, 9]. Una característica interesante en este tipo de modelos es que se parte de una funcional de acción que describe una teoría de campo gravitacional con un acoplamiento no-mínimo del campo escalar en una geometría de fondo Riemanniana. Se emplea una transformación conforme de la métrica para pasar de una acción con acoplamiento no-mínimo a otra con acoplamiento mínimo para simplificar las ecuaciones de campo de la teoría. Una consecuencia de esto último es que el potencial asociado al campo escalar se ve modificado y así se da un rescalamiento de la energía y por eso los modelos de inflación tipo Higgs pueden ser congruentes con las observaciones. Sin embargo, hay un detalle en este procedimiento que no se está atendiendo apropiadamente, y es el hecho de que cuando se implementa una transformación conforme de la métrica, la condición de compatibilidad entre la conexión afín y la métrica del espacio-tiempo cambia, con lo cual la geometría de fondo está siendo alterada y deja de ser Riemanniana. Este hecho no es tomado en cuenta en los modelos existentes en la literatura, pues a pesar de implementar la transformación conforme, siguen considerando que en ambas acciones la geometría de fondo es Riemanniana. Lo que ha llevado a serias inconsistencias de las mismas. Este problema es justamente el que pretende abordarse en este proyecto. Esto se hace al emplear el principio variacional de Palatini para determinar la geometría de fondo más apropiada para una acción dada.

Tomando en cuenta la contribución del campo de Higgs en la cosmología y gravitación, es posible obtener una buena identificación del campo inflatón con el campo de Higgs en este tipo de escenarios teóricos. Por tal motivo hemos ordenado la tesis de la siguiente manera. El capítulo 1 lo dedicamos a los problemas del modelo de la gran explosión, después analizamos los parámetros de Rodadura Lenta durante el periodo de inflación y por último abordamos índice espectral y cociente escalar-tensorial. En el capítulo 2 abordamos los elementos fundamentales de geometría diferencial, Geometría Riemanniana y Geometría

---

de Weyl-Integrable, para concluir con un análisis de las teorías escalares-tensoriales usuales. El capítulo 3 contiene los resultados de nuestra investigación y se muestra el modelo de Inflación tipo Higgs en una Geometría de Weyl-Integrable. Finalmente en el capítulo 4 se muestran algunas conclusiones y comentarios finales.

**Objetivo General:** Construir un modelo de inflación tipo Higgs que sea compatible con su geometría de fondo.

**Objetivos Particulares:**

- Construir una teoría de campo gravitacional con un campo escalar acoplado no mínimamente a la gravedad con su geometría de fondo determinada por el principio variacional de Palatini.
- Estudiar las simetrías de la geometría resultante para determinar si la acción inicial es compatible con la geometría de fondo.
- Introducir el potencial de Higgs en la teoría para construir un modelo de la inflación del universo temprano compatible con las observaciones.

# Capítulo 1

## Inflación del Universo Temprano

### 1.1. Introducción.

La teoría de la Relatividad General fue introducida por Albert Einstein en 1915 y es actualmente la descripción más acertada de la gravedad. Ésta permitió tener un mejor entendimiento del comportamiento del espacio y el tiempo, pero no es capaz de explicar sin problemas la expansión acelerada del universo.

Inflación es una época en la evolución del universo en la cual se expandió aceleradamente. Esta etapa fue introducida con la finalidad de resolver los problemas del modelo cosmológico de la gran explosión tales como el problema del horizonte, problema de la planitud, problema de los monopolos y el problema de texturas cósmicas.

### 1.2. Problemas del modelo de la gran explosión.

Un modelo cosmológico se conforma por una teoría de gravitación y un principio cosmológico, en este caso tenemos la teoría de relatividad general y que el universo sea espacialmente homogéneo e isotrópico a gran escala. Cuando decimos a gran escala nos referimos al orden de megapársecs Mpc, es decir, a partir de  $3,08 \times 10^{24}$  cm.

Isotrópico significa que en cada punto del espacio todas las direcciones son equivalentes, dicho de otra forma, no existe una dirección espacial privilegiada en el universo, es

---

decir, que las galaxias están distribuidas uniformemente en diferentes direcciones a gran escala. Esto se cumple para el universo observable y se puede comprobar a partir de las observaciones de la radiación cósmica de fondo [13].

Por otro lado, homogéneo significa que la métrica es igual en todos los puntos del espacio, es decir, no hay un punto privilegiado en el universo, las galaxias están distribuidas uniformemente en el espacio a gran escala y los estudios de galaxias en 3D lo confirman. Ahora, considerar que el universo observable es homogéneo e isotrópico a gran escala, implica que el espacio es maximalmente simétrico, considerando esto se puede definir la estructura del espacio-tiempo [15].

Considerando lo dicho anteriormente, el espacio-tiempo es  $R \times \Sigma$ , donde  $R$  representa una dirección temporal y  $\Sigma$  es una variedad tridimensional homogénea e isotrópica. La homogeneidad y la isotropía implican que una variedad tridimensional debe ser un espacio maximalmente simétrico. Por lo tanto, tenemos la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (1.2.1)$$

donde  $r$  es la coordenada radial. La función  $a(t)$  es el factor de escala o también conocido como factor de expansión, el cual está normalizado para tener el valor de 1 en la actualidad, esto quiere decir que  $a_0 = a(t_0) = 1$ . También se tiene a  $k$ , que es la curvatura, donde  $k < 0$ ,  $k = 0$  ó  $k > 0$ . Para  $k < 0$  las hipersuperficies espaciales tienen una curvatura negativa que significa un espacio abierto, para  $k = 0$  las hipersuperficies espaciales son Euclidianas que significa un espacio plano, y para el caso  $k > 0$  las hipersuperficies espaciales tienen una curvatura positiva que significa un espacio cerrado.

Para poder dar solución a las ecuaciones de Einstein se considera que se cumple este principio cosmológico, además, se requiere de un tensor energía-momento que también lo cumpla. La forma más general del tensor de energía-momento que cumple con ser homogéneo e isotrópico es la de un fluido perfecto, el cual tiene la siguiente forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (1.2.2)$$

donde  $\rho$  es la densidad de energía del fluido,  $p$  es la presión y  $u_\mu$  es la cuadrivelocidad

---

del fluido. De la homogeneidad se deduce que la presión y la densidad tienen que ser independientes de la posición, por lo que solo se tiene dependencia temporal.

La cuadrivelocidad del fluido es  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$  en un sistema de coordenadas comoviles, por lo que, la traza del tensor energía momento es

$$T = T^\mu{}_\mu = -\rho + 3p. \quad (1.2.3)$$

Empleando las leyes de la conservación en el tensor energía-momento, se tiene

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (1.2.4)$$

$$-\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (1.2.5)$$

Ahora, es necesaria la presencia de una ecuación de estado, donde se relacione la presión y la densidad. Si consideramos que el universo está lleno por un fluido perfecto, se puede proponer que su ecuación de estado que sea de la forma

$$p = \omega\rho, \quad (1.2.6)$$

donde  $\omega$  se le conoce como el parámetro de la ecuación de estado y es independiente del tiempo. Tomando esto en cuenta, la ecuación de conservación de la energía se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + \omega)\frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.2.7)$$

resolviendo la ecuación se encuentra que

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}. \quad (1.2.8)$$

Para la radiación  $\omega = 1/3$ , para la materia  $\omega = 0$  y para el vacío se tiene que  $\omega = -1$ . Por lo tanto,

$$\text{radiación dominante: } \rho \propto a^{-4}, \quad (1.2.9)$$

$$\text{materia: } \rho \propto a^{-3}, \quad (1.2.10)$$

---


$$\text{energía de vacío: } \rho \propto \rho_0. \quad (1.2.11)$$

Consideremos ahora las ecuaciones de Einstein sin la presencia de la constante cosmológica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.2.12)$$

corriendo los índices se tienen solo dos ecuaciones, una para la parte temporal y otra para la parte espacial (los tres índices corresponden a una sola ecuación, para cumplir así con la isotropía)

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G(\rho + 3p), \quad (1.2.13)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2} = 4\pi G(\rho - p). \quad (1.2.14)$$

Utilizando un poco de álgebra en las ecuaciones (1.2.13) y (1.2.14), obtenemos las ecuaciones de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (1.2.15)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (1.2.16)$$

El universo se expande de manera acelerada o desacelerada, esto depende de si  $\ddot{a}$  es positiva o negativa. En cosmología suelen usarse muchos parámetros, uno de ellos es el parámetro de Hubble que mide la rapidez de expansión en el universo y se define de la siguiente forma

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (1.2.17)$$

El valor del parámetro de Hubble en la época actual es  $H_0$  y las mediciones actuales nos dicen que se encuentra entre  $70 \pm 10$  km/seg/Mpc[32].

Otra cantidad muy importante en cosmología es el parámetro de densidad

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}}, \quad (1.2.18)$$

donde la densidad crítica se define como  $\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}$ . Ahora, escribimos la ecuación de Friedman (1.2.15) en términos del parámetro de Hubble y del parámetro de densidad, así obtenemos

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (1.2.19)$$

---

El valor de la curvatura se determina por el parámetro de densidad, se considera  $\Omega < 1$ ,  $\Omega = 1$  y  $\Omega > 1$ ; así se obtiene un modelo abierto, un modelo plano y un modelo cerrado, respectivamente

$$\begin{aligned}
\rho < \rho_{crit} &\longleftrightarrow \Omega < 1 \longleftrightarrow k < 0 \longleftrightarrow \text{abierto}, & (1.2.20) \\
\rho = \rho_{crit} &\longleftrightarrow \Omega = 1 \longleftrightarrow k = 0 \longleftrightarrow \text{plano}, \\
\rho > \rho_{crit} &\longleftrightarrow \Omega > 1 \longleftrightarrow k > 0 \longleftrightarrow \text{cerrado}.
\end{aligned}$$

De acuerdo con las observaciones de radiación cósmica de fondo (CMB), se tiene que el universo es espacialmente plano.

El modelo cosmológico de la gran explosión está dominado por dos épocas en la evolución del universo temprano. La primera época dominada por radiación y en ésta se tiene  $H^2 \sim a^{-4}$  con  $(\Omega - 1) \sim a^2$ ; durante la época dominada por materia se tiene  $H^2 \sim a^{-3}$  con  $(\Omega - 1) \sim a$ . Sin embargo, este modelo de la gran explosión tiene algunos problemas que ahora trataremos.

### Problema de planaridad

El primer problema que abordaremos es el de la planaridad. Para esto, considerando que las ecuaciones de relatividad general se cumplen a escala de Planck, con ésto nos referimos a cuando el universo tenía una temperatura  $T_{pl} \sim 10^{19}$ . Retomamos la ecuación de la curvatura

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2},$$

si se tiene que el universo es plano, entonces se tendrá que  $\Omega = 1$ . Esto se cumple cuando  $k = 0$ , pero cuando  $k$  es levemente diferente de cero  $\Omega - 1$  se alejaría de la planaridad, es decir  $\Omega - 1 \neq 0$ .

Al tiempo de Planck  $\sim 10^{-44}$  segundos se tiene que la temperatura del universo es  $T_{pl} \sim 10^{19}$  y la temperatura actual  $T_0 \sim 10^{-13}$ , tenemos

$$\frac{|\Omega - 1|_{T_{Pl}}}{|\Omega - 1|_{T_0}} \simeq \left( \frac{a_{pl}^2}{a_0^2} \right) \simeq \left( \frac{T_0^2}{T_{pl}^2} \right) \simeq O(10^{-64}). \quad (1.2.21)$$

---

Si consideramos la época de nucleosíntesis  $\sim 100$  segundos, su temperatura era  $T_N \sim 1MeV$ , que fue cuando los elementos ligeros se formaron, tenemos

$$\frac{|\Omega - 1|_{T_N}}{|\Omega - 1|_{T_0}} \simeq \left( \frac{a_N^2}{a_0^2} \right) \simeq \left( \frac{T_0^2}{T_N^2} \right) \simeq O(10^{-16}). \quad (1.2.22)$$

Para tiempos tempranos como nucleosíntesis y el tiempo de Planck, se tienen valores muy cercanos a cero, sin embargo no cero, es por esto que se tiene el problema de planaridad o también llamado de sintonizado fino.

### Problema del horizonte

Ahora trataremos el problema del horizonte, pero es necesario antes que nada definir el horizonte. El tamaño de una región causal del espacio-tiempo se establece como la distancia máxima puede viajar la luz en cierto tiempo. Otro concepto importante es el radio de Hubble. Es la distancia que recorren las partículas en el transcurso de un tiempo de expansión.

La longitud correspondiente a nuestro radio de Hubble actual en el momento de la llamada superficie de la última dispersión (cuando los electrones y protones pudieron asociarse formando átomos, de manera que los fotones ya se podían mover libremente) fue

$$\lambda_H(t_{ls}) = R_H(t_0) \left( \frac{a_{ls}}{a_0} \right) = R_H(t_0) \left( \frac{T_0}{T_{ls}} \right). \quad (1.2.23)$$

Por otra parte, tomando en cuenta el período dominado por materia, el parámetro de Hubble disminuía de la siguiente forma  $H^2 \propto \rho_m \propto a^{-3} \propto T^3$ .

Tomando esto en cuenta, en la última dispersión tenemos

$$H_{ls}^{-1} = R_H(t_0) \left( \frac{T_{ls}}{T_0} \right)^{-3/2} \ll R_H(t_0). \quad (1.2.24)$$

Podemos ver que el horizonte en ese momento era mucho menor que la longitud de nuestro radio de Hubble actual. Esto se puede mostrar al comparar los volúmenes de estas dos escalas [17]

$$\frac{\lambda_H^3(T_{ls})}{H_{ls}^{-3}} = \left( \frac{T_0}{T_{ls}} \right)^{-3/2} \approx 10^6. \quad (1.2.25)$$



Es decir, dentro nuestro horizonte había aproximadamente  $10^6$  regiones desconectadas causalmente. Las observaciones de radiación cósmica de fondo muestran que esas regiones que estuvieron desconectadas en aquella época, en la actualidad tienen la misma temperatura, este es el problema del horizonte. Dado que  $\lambda$  es una escala de longitud física

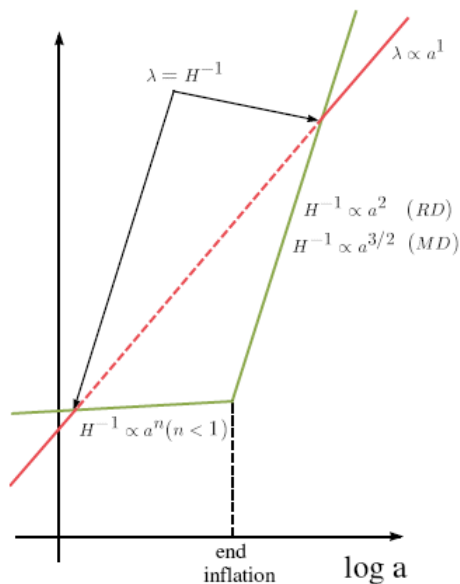


Figura 1.1: El comportamiento de una escala de longitud  $\lambda$  y el radio de Hubble  $H^{-1}$  [17].

tenemos  $\lambda \sim a$  y el radio de Hubble  $H^{-1} = a/\dot{a}$ , consideremos que  $\lambda$  indica la distancia entre dos fotones que detectamos hoy. En el momento de última dispersión los dos fotones no podían comunicarse, pues estaban desconectados causalmente, ¿cómo actualmente esos fotones tienen la misma temperatura?

Para dar solución a este problema, el universo tuvo que pasar por un período primordial durante el cual la escala de longitud física fuera menor que el radio de Hubble, donde la escala física  $\lambda$  evolucionara más rápido que el radio de Hubble, es decir,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\lambda}{H^{-1}} \right) > 0 \Rightarrow \ddot{a} > 0. \quad (1.2.26)$$

Esto da pie a pensar en un periodo de inflación en el cual el universo tiene una expansión acelerada. Esta idea la trataremos en la siguiente sección.

---

## Problema de los monopolos

Según la física de partículas cuando se da el rompimiento de simetría aparecen monopolos y defectos topológicos. Si los monopolos existieron en un periodo temprano del universo, su densidad de energía disminuyó de forma semejante a la de la materia, es decir,  $\sim a^{-3}$ . Tomando en cuenta que la densidad de energía de radiación disminuye como  $\sim a^{-4}$  en la época dominada por radiación, entonces estas partículas deberían haber sobrevivido y ser los materiales dominantes en el universo, pero las observaciones lo contradicen.

## El problema de texturas cósmicas.

Del principio cosmológico tenemos que el universo es homogéneo e isotrópico a gran escala, entonces ¿cómo podemos explicar el origen de estructuras como galaxias, cúmulos de galaxias y vacíos en el universo observable?. Por lo tanto, la teoría de la gran explosión no explica por qué nuestro universo es tan homogéneo e isotrópico, a esto se le conoce como problema de texturas cósmicas. Existen más problemas asociados a la gran explosión, como el problema de perturbaciones primordiales, el problema de entropía, entre otros, pero los antes mencionados son los de mayor relevancia. Para poder resolver estos problemas es que se introdujo el periodo de inflación que trataremos a continuación.

## 1.3. Ecuaciones de Campo en Inflación

Inflación es la época del universo temprano en la cuál se tiene una expansión acelerada del universo, es decir,  $\ddot{a} > 0$ . En términos generales, inflación da solución a los problemas de la gran explosión que habíamos abordado anteriormente, pues esta época caliente fue después de la época inflacionaria cuando la evolución temporal del factor de escala era mayor que el tamaño del horizonte cosmológico.

Alan Harvey Guth elaboró la primera formulación de la teoría del universo inflacionario en 1979. Después Andrei Linde presentó una versión mejorada que llamó inflación caótica que solucionaba algunas de las dificultades del modelo de Guth. Sin embargo existen otros modelos como inflación eterna, inflación híbrida, inflación multcampos, inflación tibia, inflación fresca y muchos más. La elección del potencial origina los diferentes modelos de

---

inflación.

Haciendo uso de la ecuación de Friedmann de aceleración (1.2.15), la expansión acelerada ocurre cuando el material que contiene el universo tiene una presión negativa, es decir

$$\rho + 3p < 0, \quad (1.3.1)$$

$$p < -\frac{1}{3}\rho. \quad (1.3.2)$$

Antes que nada, nos interesa saber qué tipo de material puede tener una presión negativa y se sabe que una presión negativa es algo característico del vacío, donde su tensor de energía momento es de la forma

$$T_{\mu\nu} = \rho_{vac}g_{\mu\nu}. \quad (1.3.3)$$

De tal manera que la densidad de energía del vacío es constante, por lo que su ecuación de estado tiene la forma  $p = -\rho$ .

Tomando en cuenta esta ecuación de estado y considerando la densidad de energía positiva, se tiene que el factor de escala crece en forma exponencial, es decir,

$$a(t) = cte e^{H_{vac}t}, \quad (1.3.4)$$

donde

$$H_{vac} = \sqrt{\frac{8\pi}{3} \frac{\rho_{vac}}{m_{pl}^2}}. \quad (1.3.5)$$

Tener una densidad de energía de vacío positiva implica que se tendrá una expansión inflacionaria, pero también se requiere que la etapa inflacionaria termine y dé lugar a la formación de la materia. Por esta razón, se cambia la idea del vacío. Ahora lo asociamos a un campo con densidad casi constante durante el periodo de inflación, pero que en algún momento el campo decaiga y esto dé lugar a la formación de la materia más elemental. De esta forma terminaría el periodo de inflación. Teniendo en cuenta toda esta explicación

---

se propone que sea un campo escalar conocido como inflatón el que controle la expansión del universo.

La acción para el campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad es

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (1.3.6)$$

donde el tensor energía-momento es

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) \right]. \quad (1.3.7)$$

En el periodo inflacionario el universo se infló de una manera abrupta aplanando el espacio, por esta razón consideramos la métrica FLRW espacialmente plana,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [dx^2 + dy^2 + dz^2], \quad (1.3.8)$$

ahora tomando en cuenta que el inflatón es homogéneo en el universo espacialmente plano con la métrica FLRW espacialmente plana (1.3.8). De la acción (1.3.6) encontramos la ecuación de movimiento

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\nabla^2 \phi}{a^2} + V'(\phi) = 0, \quad (1.3.9)$$

donde  $V'(\phi) = \frac{dV(\phi)}{d\phi}$ .

Por otro lado, al considerar un fluido perfecto, obtenemos que la densidad de energía  $\rho_\phi$  y densidad de presión  $p_\phi$  están dadas por

$$\rho_\phi = T_{00} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \frac{1}{2} \frac{(\nabla\phi)^2}{a^2}, \quad (1.3.10)$$

$$p_\phi = \frac{T^i_i}{3} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) - \frac{1}{6} \frac{(\nabla\phi)^2}{a^2}, \quad (1.3.11)$$

por lo tanto, el parámetro de la ecuación de estado es

$$\omega = \frac{p}{\rho} = \frac{\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) - \frac{1}{6} \frac{(\nabla\phi)^2}{a^2}}{\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \frac{1}{2} \frac{(\nabla\phi)^2}{a^2}}. \quad (1.3.12)$$

---

Durante inflación, cuando se impone el principio cosmológico tenemos que  $\phi = \phi(t)$ , el campo es independiente de las coordenadas espaciales. Por lo tanto, la ecuación de movimiento (1.3.9) se escribe como

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (1.3.13)$$

la densidad de energía y presión son

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (1.3.14)$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (1.3.15)$$

El parámetro de la ecuación de estado durante inflación es

$$\omega = \frac{p}{\rho} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}. \quad (1.3.16)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.3.14) y (1.3.15) en la ecuaciones de Friedmann, se obtienen

$$H^2 = \frac{8\pi}{3m_{pl}^2} \left[ \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right], \quad (1.3.17)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi}{3m_{pl}^2} \left[ \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right]. \quad (1.3.18)$$

## 1.4. Parámetros de Rodadura Lenta.

La ecuación (1.3.13) la podemos ver como una ecuación donde gobierna la rodadura lenta en un pozo de potencial  $V(\phi)$  con coeficiente de fricción  $3H$  que es dependiente del tiempo [16]. La rodadura lenta se da cuando el término de aceleración es mucho menor que el término de fricción, es decir,

$$\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}. \quad (1.4.1)$$

A esta condición se le conoce como condición de rodadura lenta. Por otro lado, para tener una ecuación de estado que describa un material que permita una expansión acelerada

del universo, es necesario que la energía cinética sea pequeña comparada con la energía potencial, es decir,

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V(\phi), \quad (1.4.2)$$

así tenemos otra condición de rodadura lenta, tomando esta última condición de rodadura lenta en la ecuación de estado (1.3.16) se tiene,

$$p \approx \rho \frac{-V(\phi)}{V(\phi)} = -\rho, \quad (1.4.3)$$

$$\omega \approx -1, \quad (1.4.4)$$

con esto podemos corroborar que efectivamente el campo tiene un comportamiento muy

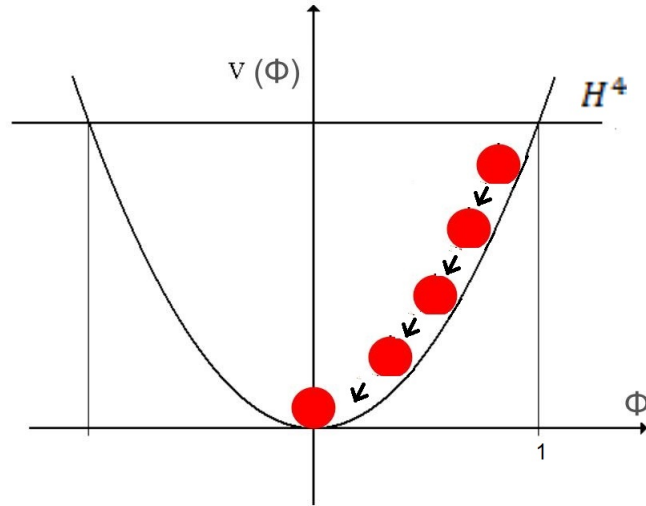


Figura 1.2: Rodadura lenta.

semejante al vacío y así se genera una expansión del universo que es casi exponencial.

Aplicando las condiciones de rodadura lenta (1.4.1) y (1.4.2) a las ecuaciones (1.3.13) y (1.3.17), estas adquieren la forma

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi), \quad (1.4.5)$$

$$H^2 \simeq \frac{8\pi}{3m_{pl}^2} V(\phi). \quad (1.4.6)$$

---

Simplificando, tenemos que las ecuaciones (1.4.5) y (1.4.6) toman la siguiente forma

$$\dot{\phi} = -\frac{1}{3H} V'(\phi), \quad (1.4.7)$$

$$H = \frac{1}{m_{pl}} \left( \frac{8\pi V}{3} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.4.8)$$

Ahora nos interesa mostrar que la expansión del universo es casi exponencial, por lo que, se calcula cuánto cambia el parámetro de Hubble en el tiempo de Hubble. Lo primero que hacemos es calcular la derivada la ecuación (1.4.8)

$$\dot{H} = \frac{1}{2m_{pl}} \left( \frac{8\pi}{3V} \right)^{\frac{1}{2}} V'(\phi) \dot{\phi}, \quad (1.4.9)$$

después calculamos

$$\frac{\dot{H}}{H} = -\frac{3}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{V}, \quad (1.4.10)$$

aplicando la condición de rodadura lenta (1.4.2) tenemos

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1. \quad (1.4.11)$$

Con esto podemos corroborar que el parámetro de Hubble cambia muy lentamente en la etapa en el que el campo rueda lentamente al mínimo del potencial.

Por otro lado, nos interesa encontrar las condiciones para el potencial escalar en las que se asegura que se cumplen las condiciones de rodadura lenta (1.4.1) y (1.4.2). Primero obtenemos la expresión para la velocidad del campo en términos del potencial,

$$\dot{\phi} = -\frac{m_{pl}}{(24\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{V'}{V^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.4.12)$$

La condición de rodadura lenta  $\frac{\dot{\phi}^2}{2V(\phi)} \ll 1$  ahora se escribe como

$$\frac{m_{pl}^2}{48\pi} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1. \quad (1.4.13)$$

Calculamos la derivada temporal de (1.4.12) y obtenemos

$$\ddot{\phi} = -\frac{m_{pl}^2}{8\pi} \left[ \frac{V''}{V} - \frac{1}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \right] H \dot{\phi}, \quad (1.4.14)$$

ahora retomamos la ecuación (1.4.13) y encontramos que la condición  $\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$  se cumplirá siempre y cuando

$$\left| \frac{V''}{V} \right| \ll \frac{24\pi}{m_{pl}^2}. \quad (1.4.15)$$

Podemos asegurar que se cumple la condición de rodadura lenta siempre y cuando el potencial escalar cumpla con (1.4.13) y (1.4.15).

Teniendo esto en cuenta definimos los parámetros de rodadura lenta

$$\epsilon \equiv \frac{m_{pl}^2}{16\pi} \left( \frac{V'}{V} \right)^2, \quad (1.4.16)$$

$$\eta \equiv \frac{m_{pl}^2}{8\pi} \frac{V''}{V}. \quad (1.4.17)$$

Las aproximaciones anteriores son válidas cuando  $\epsilon \ll 1, \eta \ll 1$ . El periodo de expansión acelerada termina cuando alguno de estos parámetros se acercan a uno.

Por otro lado, el número de desdoblamiento exponenciales durante el periodo inflacionario es,

$$N(\phi) \equiv \ln \frac{a_f}{a_i} = \int_{t_i}^{t_f} H dt, \quad (1.4.18)$$

donde  $a_i$  es el valor inicial y  $a_f$  es el valor final del factor de escala. Para resolver el problema de la planaridad y el problema del horizonte, se requiere, por lo menos 63 desdoblamiento exponenciales. Es decir, en el problema de la planaridad tenemos  $|\Omega_f - 1| \lesssim 10^{-63}$  justo después del final de inflación.

## 1.5. Modelo de Inflación Caótica.

Como ya habíamos mencionado, el modelo de inflación caótica es uno de los que han tenido mayor impacto. Este pertenece a la clase de modelos de campo grande, donde el valor inicial del inflatón es grande y rueda hacia el mínimo del potencial. El modelo de inflación caótica se describe por el potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (1.5.1)$$



---

Considerando este potencial en la evolución del universo, se tienen las ecuaciones

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi) \Rightarrow 3H\dot{\phi} + m^2\phi \simeq 0, \quad (1.5.2)$$

$$H^2 \simeq \frac{8\pi}{3m_{pl}^2}V(\phi) \Rightarrow H^2 \simeq \frac{4\pi m^2\phi^2}{3m_{pl}^2}. \quad (1.5.3)$$

Resolviendo las ecuaciones (1.5.2) y (1.5.3) se obtienen

$$\phi \simeq \phi_i - \frac{mm_{pl}}{2\sqrt{3}\pi}t, \quad (1.5.4)$$

$$a \simeq a_i e^{\left[2\sqrt{\frac{\pi}{3}}\frac{m}{m_{pl}}\left(\phi_i t - \frac{mm_{pl}}{4\sqrt{3}\pi}t^2\right)\right]}. \quad (1.5.5)$$

Podemos ver de la ecuación (1.5.5) que el universo se expande exponencialmente durante la etapa de inflación.

Ahora calculamos los parámetros de rodadura lenta y obtenemos

$$\epsilon = \eta = \frac{m_{pl}^2}{4\pi\phi^2}. \quad (1.5.6)$$

Podemos ver de la ecuación (1.5.6) que el período de inflación termina aproximadamente cuando

$$|\phi| \approx \frac{m_{pl}}{\sqrt{4\pi}}. \quad (1.5.7)$$

Después calculamos el número de desdoblamientos exponenciales

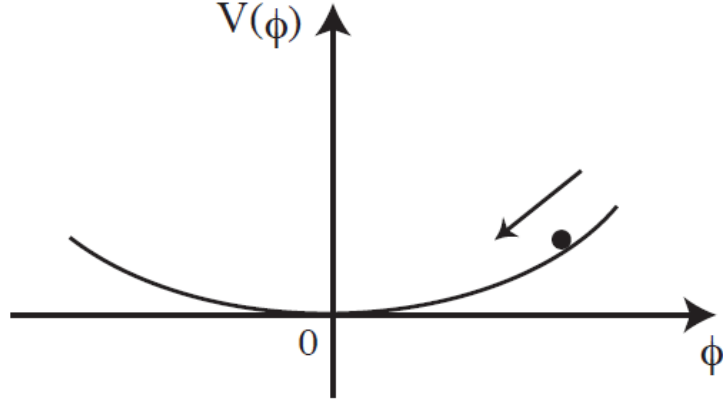
$$N \simeq 2\pi \left(\frac{\phi_i}{m_{pl}}\right)^2 - \frac{1}{2}. \quad (1.5.8)$$

Para poder generar la inflación suficiente, es necesario que  $N \gtrsim 63$ , tomando esto en cuenta se requiere que el valor inicial del campo inflatón sea

$$\phi_i \gtrsim 3m_{pl}, \quad (1.5.9)$$

ahora para que sea posible contrastar con las observaciones, es necesario que la masa sea

$$m \simeq 10^{-6}m_{pl}. \quad (1.5.10)$$



La ilustración del potencial del modelo de inflación caótica.

En la siguiente sección analizaremos las fluctuaciones durante el periodo de inflación y el cociente escalar-tensorial para el modelo de inflación caótica.

## 1.6. Índice espectral y cociente escalar-tensorial.

Una gran aportación de la inflación es que explica la existencia de las perturbaciones cosmológicas. Durante la época de inflación, las perturbaciones de densidad son generadas por las fluctuaciones cuánticas en el vacío del inflatón. En esta sección nos enfocaremos en las perturbaciones cosmológicas generadas por la inflación. El elemento diferencial de línea que describe las perturbaciones de la métrica es el siguiente

$$ds^2 = a^2(\eta) [(1 + 2\Phi) d\eta^2 - (1 - 2\Phi) dx^2] \quad (1.6.1)$$

Ahora calcularemos el tensor energía momento del inflatón

$$T_\nu^\mu = g^{\mu\lambda} \partial_\nu \phi \partial_\lambda \phi - \delta_\nu^\mu \left( \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \partial_\lambda \phi \partial_\rho \phi - V(\phi) \right). \quad (1.6.2)$$

Ahora consideramos en campo inflatón de la forma  $\phi(x, t) = \phi_c(t) + \varphi(x, t)$ , donde  $\phi_c$  es la parte clásica y  $\varphi(x, t)$  es la parte cuántica del campo. Calculamos las componentes del tensor energía momento que más adelante serán necesarias

$$\delta T_0^0 = \delta\rho = \frac{1}{a^2} [-\Phi \phi_c'^2 + \phi_c' \varphi] + \frac{dV(\phi_c)}{d\phi_c} \varphi, \quad (1.6.3)$$

---


$$\delta T_i^0 = \frac{1}{a^2} \phi'_c \partial_i \varphi. \quad (1.6.4)$$

En donde las perturbaciones escalares de las ecuaciones de Einstein son las siguientes

$$\Delta \Phi - 3 \frac{a'}{a} \Phi' - 3 \frac{a'^2}{a^2} \Phi = -4\pi G \phi_c'^2 \Phi + 4\pi G \left[ \phi_c' \varphi' - \left( \phi_c'' + 2 \frac{a'}{a} \phi_c' \right) \varphi \right], \quad (1.6.5)$$

$$\Phi' + \frac{a'}{a} \Phi = 4\pi G \phi_c' \varphi. \quad (1.6.6)$$

Haciendo uso de las ecuaciones obtenemos (1.6.5) y (1.6.6)

$$\Delta \Phi = 4\pi G \frac{a}{a'} \phi_c'^2 \frac{d}{d\eta} \left( \Phi + \frac{a'}{a \phi_c'} \varphi \right). \quad (1.6.7)$$

Tomando en cuenta el potencial de velocidad efectiva  $v = -\varphi/\phi_c'$  podemos observar que el término entre paréntesis es

$$\mathcal{R} = -\Phi + \frac{a'}{a} v = - \left( \Phi + \frac{a'}{a \phi_c'} \varphi \right), \quad (1.6.8)$$

donde  $\mathcal{R}$  es la curvatura espacial de hipersuperficies del campo. Su espectro de potencias es

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \left( H \frac{H^2}{2\pi \dot{\phi}_c} \right)_{\eta k}^2. \quad (1.6.9)$$

El espectro de potencia de las perturbaciones del tensor, es

$$\mathcal{P}_T = \frac{32\pi}{m_{pl}^2} \sum \frac{H_k^2}{(2\pi)^2} = \frac{16}{\pi} \frac{H_k^2}{m_{pl}^2}, \quad (1.6.10)$$

considerando la rodadura lenta tendremos

$$\mathcal{P}_T = \frac{128}{3} \frac{V}{m_{pl}^4}. \quad (1.6.11)$$

Ahora calcularemos el cociente escalar-tensorial que se define de la siguiente forma

$$r \equiv \frac{\mathcal{P}_T}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} = \frac{1}{\pi} \frac{m_{pl}^2 V'^2}{V} = 16\epsilon, \quad (1.6.12)$$

donde  $\epsilon$  es el parámetro de rodadura lenta antes mencionado. Considerando el modelo de inflación caótica, se tendría

$$r = \frac{4n}{N} = 0,13 - 0,16. \quad (1.6.13)$$

---

Puesto que las perturbaciones de diferentes longitudes de onda salen del horizonte inflacionario en diferentes momentos y el campo inflatón evoluciona en el tiempo, se tiene que los espectros tensorial y escalar no son exactamente planos. Por esta razón el espectro escalar y el espectro tensorial se parametrizan como se muestra a continuación

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = A_{\mathcal{R}} \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_s - 1}, \quad (1.6.14)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{T}}(k) = A_{\mathcal{T}} \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_T}. \quad (1.6.15)$$

Ahora nos interesa calcular el escalar (tilt)  $n_s - 1$ , tenemos

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_*) \left\{ 1 + \left( 3 \frac{V'}{V} - 2 \frac{V''}{V'} \right) [\phi(\eta_k) - \phi(\eta_{k_*})] \right\} \quad (1.6.16)$$

donde  $\phi(\eta_k)$  es el campo inflatón en el momento cuando el modo del momento  $k$  sale del horizonte inflacionario.

En donde realizando un poco de cálculos, encontramos que

$$\phi(\eta_k) - \phi(\eta_{k_*}) = -\frac{m_{pl}^2 V'}{8\pi V} \log \frac{k}{k_*}, \quad (1.6.17)$$

emplenado (1.6.17) en (1.6.16) tenemos

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_*) \left[ 1 + (2\eta - 6\epsilon) \log \frac{k}{k_*} \right]. \quad (1.6.18)$$

Por otro lado, retomando la ecuación (1.6.14), tenemos que

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_*) \left[ 1 + (n_s - 1) \log \frac{k}{k_*} \right]. \quad (1.6.19)$$

Comparando la ecuación (1.6.18) con (1.6.19) encontramos el índice escalar espectral

$$n_s - 1 = 2\eta - 6\epsilon. \quad (1.6.20)$$

Ahora que hemos tratado los principales temas de inflación abordaremos en el siguiente capítulo los elementos base de Geometría Riemanniana y no Riemanniana, con el objetivo de poder encontrar cual es la Geometría de fondo apropiada de una teoría escalar-tensorial.

# Capítulo 2

## Geometría de Weyl-Integrable

### 2.1. Introducción.

La teoría de la relatividad general fue introducida por Albert Einstein en 1915 y es actualmente la descripción más acertada de la gravedad, pues explica la gravedad como un efecto de la curvatura del espacio-tiempo mismo. Es en este sentido que esta teoría es de naturaleza geométrica y, por tanto, su descripción hace uso de diversos elementos de la geometría diferencial. A partir de la presentación de la relatividad general, algunas teorías de gravitación más generales fueron postuladas. Una clase de este tipo son las llamadas teorías escalares-tensoriales de la gravedad, que al igual que la relatividad general fueron construidas en el marco teórico de la geometría Riemanniana. Sin embargo, recientemente se han formulado un nuevo tipo de teorías escalares tensoriales de la gravedad conocidas como teorías escalares-tensoriales geométricas de la gravedad. La diferencia fundamental de estas últimas con las primeras radica en que las primeras siempre son formuladas en una geometría de fondo Riemanniana, lo que ha llevado a serias inconsistencias de las mismas, mientras que en las segundas se emplea el principio variacional de Palatini para determinar la geometría de fondo más apropiada para una acción dada.

En este capítulo abordaremos los conceptos y principios fundamentales involucrados en estas teorías escalares-tensoriales de la gravedad. Sin embargo, para una mejor compren-

---

sión de tales teorías se requiere del conocimiento de algunos temas específicos de geometría Riemanniana, no-Riemanniana y de Weyl-Integrable. Por esta razón comenzaremos este capítulo con un repaso de geometría diferencial tanto Riemanniana como no-Riemanniana.

## 2.2. Metricidad en Geometría Riemanniana.

Para una mejor comprensión de metricidad antes es necesario definir algunos conceptos importantes.

**Definición 2.2.1.** Dado un espacio topológico  $\mathcal{M}$ , una carta en  $\mathcal{M}$  es un par  $(U, \phi)$ , donde  $\phi$  es un mapeo uno a uno de un subconjunto abierto  $U \subset \mathcal{M}$  a un subconjunto abierto  $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ , i.e., un mapeo  $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . A una carta también es común llamarle sistema coordinado.

**Definición 2.2.2.** Dos cartas  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son  $C^\infty$ -relacionadas si ambos, el mapeo

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : (U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2) \quad (2.2.1)$$

y su inversa son  $C^\infty$ . Una colección de cartas  $C^\infty$ -relacionadas tales que en cada punto de  $\mathcal{M}$  se encuentra en el dominio de al menos una carta forma un atlas, descrito por  $\mathcal{A}$ .

**Definición 2.2.3.** La colección de todas las cartas  $C^\infty$ -relacionadas forman un atlas maximal.

**Definición 2.2.4.** Si  $\mathcal{M}$  es un espacio topológico y  $\mathcal{A}$  es un atlas maximal, el par  $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$  es una variedad diferenciable  $(C^\infty -)$ .

**Definición 2.2.5.** Si para cada  $\phi$  en el atlas, el mapeo  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tiene el mismo  $n$ , entonces la variedad tiene dimensión  $n$ .

Ahora que ya fue introducida la definición de variedad diferenciable, es necesario definir el concepto de curva en una variedad diferenciable.

**Definición 2.2.6.** Sea  $\mathcal{M}$  una variedad diferenciable. Una función  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{M}$  diferenciable es llamada curva diferenciable en  $\mathcal{M}$ .

---

Supóngase que  $\alpha(0) = p \in \mathcal{M}$ , y sea  $\mathcal{D}$  el conjunto de funciones en  $\mathcal{M}$  que son diferenciables en  $p$ . El *vector tangente a la curva*  $\alpha$  en  $t = 0$  es una función  $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}$  dada por

$$\alpha'(0) f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}. \quad (2.2.2)$$

**Definición 2.2.7.** Un *vector tangente en  $p$*  es el vector tangente en  $t = 0$  de alguna curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{M}$  con  $\alpha(0) = p$ .

**Definición 2.2.8.** Al conjunto de todos los vectores tangentes a  $\mathcal{M}$  en  $p$  se le denomina *espacio tangente* de  $\mathcal{M}$  en  $p$  y se denota como  $T_p(\mathcal{M})$

$$T_p(\mathcal{M}) = \left\{ \bar{V}_p \mid \bar{V} = \left. \frac{d}{d\sigma} \right|_p, p \in \mathcal{M} \right\}. \quad (2.2.3)$$

De esta manera ahora es posible definir el espacio dual de  $T_p(\mathcal{M})$  de la siguiente forma.

**Definición 2.2.9.** El espacio cotangente en un punto  $p \in \mathcal{M}$ , se expresa como  $T_p^*(\mathcal{M})$  y está dado por

$$T_p^*(\mathcal{M}) = \{ \tilde{\omega} : T_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{R} \mid \tilde{\omega} \text{ es lineal} \}, \quad (2.2.4)$$

que es el conjunto de todos los vectores cotangentes a  $p$ . Los elementos de  $T_p^*(\mathcal{M})$  son llamados 1-formas o covectores.

Los elementos que hemos definido hasta este momento son muy importantes pues éstos nos permiten describir cambios en curvas en la variedad, pero ahora queremos introducir la distancia o longitud de vectores, para esto es necesario definir el producto interno en cada espacio tangente en la variedad.

**Definición 2.2.10.** Definimos el producto interno o métrica por la función bilineal

$$g : T_p(\mathcal{M}) \times T_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{R}, \quad (2.2.5)$$

$$(\bar{U}, \bar{V}) \mapsto g(\bar{U}, \bar{V})$$

que cumple con las siguientes propiedades

1. Simetría :  $g(\bar{U}, \bar{V}) = g(\bar{V}, \bar{U})$ .

---

2. No degeneración:  $g(\bar{U}, \bar{V}) = 0 \forall \bar{V} \in T_p(\mathcal{M})$  sii  $\bar{U} = \bar{0}$ .

Si además  $g$  es definida positiva,  $g(\bar{U}, \bar{V}) \geq 0 \forall \bar{U}, \bar{V} \in T_p(\mathcal{M})$ , entonces se dice que se tiene un producto interno o métrica Riemanniana, de lo contrario se tiene una métrica pseudo-Riemanniana ó semi-Riemanniana.

De la definición de la métrica podemos ver que la forma en que se introduce la idea de distancia es asignando una cantidad escalar a vectores del mismo espacio tangente. Donde no hay una dependencia particular de selección de coordenadas.

**Definición 2.2.11.** La signatura de una métrica es la diferencia entre los eigenvalores positivos y negativos. Si en una variedad  $n$ -dimensional la signatura es  $n$  entonces  $g$  es definida positiva o Riemanniana, pero si la signatura es  $\pm(n-2)$  entonces  $g$  es pseudo-Riemanniana o Lorentziana.

**Definición 2.2.12.** Una variedad diferenciable dotada con una métrica Riemanniana se le llama variedad Riemanniana.

La métrica nos permite medir la longitud de una curva, como veremos a continuación.

**Definición 2.2.13.** Dada una variedad Riemanniana  $(\mathcal{M}, g)$  y una curva  $\sigma(\lambda) : I \rightarrow \mathcal{M}$ , con  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ , se define la longitud de esta curva por

$$s = \int_a^b \sqrt{g(\bar{V}, \bar{V})} d\lambda. \quad (2.2.6)$$

En una carta coordenada, la curva  $\sigma(\lambda)$  es descrita por la ecuación paramétrica  $x^\mu(\lambda)$  y su longitud queda expresada como

$$s = \int_a^b \sqrt{\left( \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right)} d\lambda. \quad (2.2.7)$$

Debido a la bilinealidad de  $g$ , la expresión anterior se reduce a

$$s = \int_a^b \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}} d\lambda = \int_a^b \sqrt{g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}. \quad (2.2.8)$$

Escribiendo esta ecuación en forma diferencial se llega a

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (2.2.9)$$

que es conocida como el elemento diferencial de línea.



Con la finalidad de medir distancias se introdujo la métrica. Tomamos dos elementos de un espacio tangente asociado a un punto de la variedad. Sin embargo, nos interesa el poder comparar cualesquiera dos vectores pertenecientes a distintos espacios tangentes y así poder definir diferenciabilidad. En términos geométricos, el poder hacer estas comparaciones nos llevará al concepto de paralelismo en la variedad. Por esta razón, a continuación se introduce el concepto de conexión afín.

**Definición 2.2.14.** Dados dos campos vectoriales  $\bar{V}, \bar{W} \in T(\mathcal{M})$  se define la conexión afín como el mapeo

$$\begin{aligned} \nabla : T(\mathcal{M}) \times T(\mathcal{M}) &\rightarrow T(\mathcal{M}) \\ (\bar{V}, \bar{W}) &\mapsto \nabla_{\bar{V}} \bar{W} \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

y satisface las siguientes propiedades:

1.  $\nabla_{\bar{V}} (\bar{U} + \bar{W}) = \nabla_{\bar{V}} \bar{U} + \nabla_{\bar{V}} \bar{W}.$
2.  $\nabla_{f\bar{U}+g\bar{V}} \bar{W} = f \nabla_{\bar{U}} \bar{W} + g \nabla_{\bar{V}} \bar{W}.$
3.  $\nabla_{\bar{V}} (f\bar{W}) = \bar{V}(f) \bar{W} + f \nabla_{\bar{V}} \bar{W}.$

Con  $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W} \in T(\mathcal{M})$  y  $f, g : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}.$

Dado que  $\nabla_{\bar{U}} \bar{V} \in T(\mathcal{M})$ , en una base coordenada para  $T(\mathcal{M})$  se tiene que

$$\nabla_{\partial_\alpha} \partial_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \partial_\lambda, \tag{2.2.11}$$

donde el orden de los índices  $\alpha$  y  $\beta$  es una convención. A las cantidades  $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$  se les llama *componentes de conexión* respecto a la base coordenada  $\{\partial_\beta\}$ . Si la base es no coordenada, se cumple que

$$\nabla_{\bar{e}_\alpha} \bar{e}_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \bar{e}_\lambda. \tag{2.2.12}$$

**Definición 2.2.15.** Una conexión afín  $\nabla$  en una variedad diferenciable  $\mathcal{M}$  se dice simétrica si satisface

$$\nabla_{\bar{U}} \bar{V} - \nabla_{\bar{V}} \bar{U} = [\bar{U}, \bar{V}], \tag{2.2.13}$$

donde  $[\overline{U}, \overline{V}]$  es el conmutador.

En una carta coordenada tenemos

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_\alpha} \partial_\beta - \nabla_{\partial_\beta} \partial_\alpha &= [\partial_\alpha, \partial_\beta] = 0, \\ \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \partial_\lambda &= \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda \partial_\lambda, \\ \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda &= \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda.\end{aligned}\tag{2.2.14}$$

Por medio de este objeto podremos hacer distinción entre campos vectoriales. Para poder hacer este cambio es necesario emplear la derivada covariante, cuya definición veremos a continuación.

**Definición 2.2.16.** Sea  $\alpha(\lambda)$  una curva definida en  $\mathcal{M}$ , el campo vectorial tangente definido naturalmente en ella es  $\frac{d}{d\lambda} \in T_{\alpha(\lambda)}(\mathcal{M})$ , sea  $\overline{W}(\lambda) \in T_{\alpha(\lambda)}(\mathcal{M})$  otro campo vectorial. Se define la derivada covariante de  $\overline{W}(\lambda)$  respecto a  $\frac{d}{d\lambda}$  por

$$\frac{D\overline{W}}{d\lambda} \equiv \nabla_{\frac{d}{d\lambda}} \overline{W}(\lambda).\tag{2.2.15}$$

De esta manera, en una carta coordenada  $\{\partial_\mu\}$  se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{D\overline{W}}{d\lambda} &= \nabla_{\frac{dx^\beta}{d\lambda}} (\omega^\alpha \partial_\alpha) \\ &= \frac{dx^\beta}{d\lambda} \left[ \partial_\beta (\omega^\alpha) \partial_\alpha + \omega^\alpha \nabla_{\partial_\beta} \partial_\alpha \right] \\ &= \frac{dx^\beta}{d\lambda} \omega^\sigma_{;\beta} \partial_\sigma,\end{aligned}\tag{2.2.16}$$

donde  $\omega^\sigma_{;\beta} = \omega^\sigma_{,\beta} + \Gamma_{\beta\alpha}^\sigma \omega^\alpha$ .

De la definición anterior, si se tiene una variedad diferenciable  $\mathcal{M}$  con una conexión afín  $\nabla$ , entonces existe una única correspondencia que asocia un campo vectorial  $\overline{V}$  a lo largo de la curva diferencial  $\alpha(t) : (a, b) \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}$ , con otro campo vectorial  $\frac{D\overline{V}}{dt}$  a lo largo de  $\alpha(t)$  denominado derivada covariante de  $\overline{V}$  a lo largo de  $\alpha$ , de tal manera que se que se cumple que [29, 30].

1.  $\frac{D}{dt} (\overline{V} + \overline{W}) = \frac{D\overline{V}}{dt} + \frac{D\overline{W}}{dt}$ .

---


$$2. \frac{D}{dt}(f\bar{V}) = \frac{df}{dt}\bar{V} + f\frac{D\bar{V}}{dt}.$$

$$3. \text{ Si } \bar{V}(t) = \bar{Y}[\alpha(t)], \text{ entonces } \frac{D\bar{V}}{dt} = \nabla_{\frac{d}{dt}}\bar{Y}.$$

Sea  $\bar{V}(t)$  un campo vectorial inducido por un campo de vectores  $\bar{Y} \in T(\mathcal{M})$ .

Al mover un vector sin cambiar su magnitud o dirección, se dice que se transporta paralelamente. La derivada covariante nos permite definir el transporte paralelo a lo largo de una curva en una variedad.

**Definición 2.2.17.** Sea  $V$  un campo vectorial, se dice que este es transportado paralelamente a lo largo de una curva  $\lambda$  si

$$\frac{D}{d\lambda}\bar{V} = 0. \quad (2.2.17)$$

En el espacio plano, una geodésica es la distancia más corta entre dos puntos, es decir, una línea recta. El campo vectorial  $\bar{V}$  tiene la propiedad de que su vector tangente se transporta paralelamente sobre sí mismo, es decir,  $\nabla_{\bar{V}}\bar{V} = 0$ .

**Definición 2.2.18.** Sea  $\bar{V}$  un campo vectorial que cumple  $\nabla_{\bar{V}}\bar{V} = 0$ . Entonces las curvas integrales de  $\bar{V}$  se llaman geodésicas.

Podemos plantear la métrica y la conexión afín de manera independiente. Sin embargo, cuando se cumplen ciertas condiciones específicas sobre la conexión existe una relación entre ambas que da origen a la geometría Riemanniana.

**Definición 2.2.19.** Sea  $\mathcal{M}$  una variedad diferenciable con una conexión afín  $\nabla$  y una métrica Riemanniana  $g$ , la conexión  $\nabla$  se dice *compatible* con  $g$  cuando para cualquier curva diferenciable  $\lambda : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $\sigma \rightarrow \lambda(\sigma)$ , y cualesquiera campos de vectores  $\bar{V}$  y  $\bar{W}$  a lo largo de  $\lambda$ , se cumple que  $g(\bar{V}, \bar{W}) = \text{constante}$ . De esta condición se tiene que

$$\frac{D}{d\lambda}g(\bar{V}, \bar{W}) = 0. \quad (2.2.18)$$

El producto interno entre vectores a lo largo de la curva  $\lambda$  es conservado. La longitud de un vector cuando es transportado paralelamente es constante. La condición (2.2.18)

se conoce como *condición de metricidad* y es un factor determinante para especificar el tipo de geometría del espacio. En particular, a la geometría derivada de la condición de metricidad (2.2.18) se le llama *Geometría Riemanniana*.

En una carta coordenada, la condición de metricidad se expresa como

$$\nabla_{\mu}g_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.2.19)$$

Dada la condición de compatibilidad (2.2.19), cabe preguntarse si esta compatibilidad es única o si existen una infinidad de elecciones que cumplan con esta condición. Para responder a esto, se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.1.** *(de Levi-Civita) Dada una variedad Riemanniana  $\mathcal{M}$ , existe una única conexión afín  $\nabla$  en  $\mathcal{M}$  que satisface*

1.  $\nabla$  es simétrica.
2.  $\nabla$  es compatible con la métrica  $g$ .

*Demostración.* Sean  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} \in T(\mathcal{M})$  y  $g$  una métrica definida en  $\mathcal{M}$ . Entonces se cumple que

$$\bar{X}g(\bar{Y}, \bar{Z}) = g\left(\frac{\nabla\bar{Y}}{\bar{X}}, \bar{Z}\right) + g\left(\bar{Y}, \frac{\nabla\bar{Z}}{\bar{X}}\right). \quad (2.2.20)$$

Permutando los campos vectoriales la ecuación (2.2.20) puede escribirse como

$$\bar{Y}g(\bar{Z}, \bar{X}) = g\left(\frac{\nabla\bar{Z}}{\bar{Y}}, \bar{X}\right) + g\left(\bar{Z}, \frac{\nabla\bar{X}}{\bar{Y}}\right). \quad (2.2.21)$$

Permutando nuevamente

$$\bar{Z}g(\bar{X}, \bar{Y}) = g\left(\frac{\nabla\bar{X}}{\bar{Z}}, \bar{Y}\right) + g\left(\bar{X}, \frac{\nabla\bar{Y}}{\bar{Z}}\right). \quad (2.2.22)$$

Haciendo uso de la simetría se obtiene

$$\bar{X}g(\bar{Y}, \bar{Z}) + \bar{Y}g(\bar{Z}, \bar{X}) - \bar{Z}g(\bar{X}, \bar{Y}) = g([\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z}) + g([\bar{Y}, \bar{Z}], \bar{X}) + g([\bar{X}, \bar{Z}], \bar{Y}) + 2g\left(\frac{\nabla\bar{X}}{\bar{Y}}, \bar{Z}\right). \quad (2.2.23)$$

---

Resolviendo la ecuación (2.2.23) para  $g\left(\frac{\nabla\bar{X}}{\bar{Y}}, \bar{Z}\right)$  se genera la expresión

$$g\left(\frac{\nabla\bar{X}}{\bar{Y}}, \bar{Z}\right) = \frac{1}{2} \left\{ \bar{X}g(\bar{Y}, \bar{Z}) + \bar{Y}g(\bar{Z}, \bar{X}) - \bar{Z}g(\bar{X}, \bar{Y}) - g([\bar{Y}, \bar{Z}], \bar{X}) - g([\bar{X}, \bar{Z}], \bar{Y}) - g([\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z}) \right\}, \quad (2.2.24)$$

lo cual demuestra el teorema, pues se especifica la conexión en términos de la métrica de manera única.  $\square$

Por otro lado, en una base coordenada, la ecuación (2.2.24) nos lleva a

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} (g_{\sigma\alpha,\beta} + g_{\sigma\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\sigma}), \quad (2.2.25)$$

éstas son las componentes de conexión conocidos en la literatura como símbolos de Christoffel de segunda especie o como conexión de Levi-Civita. Cuando no se cumple la condición (2.2.18) y se obtiene que la derivada covariante de la métrica es no nula, decimos que se trata de una geometría no-Riemanniana. En la siguiente sección hablaremos de un caso particular de las geometrías no-Riemannianas que es la geometría de Weyl-Integrable.

### 2.3. Compatibilidad en una Geometría de Weyl-Integrable.

Una geometría no-Riemanniana satisface una condición de compatibilidad de la forma

$$\frac{D}{d\lambda}g(\bar{V}, \bar{W}) = N\left(\frac{d}{d\lambda}, \bar{V}, \bar{W}\right) \neq 0. \quad (2.3.1)$$

Donde a la cantidad  $N\left(\frac{d}{d\lambda}, \bar{V}, \bar{W}\right)$  se le llama tensor de no-metricidad. En una carta coordenada la expresión (2.3.1) se escribe

$$\nabla_{\mu}g_{\alpha\beta} = N_{\mu\alpha\beta}. \quad (2.3.2)$$

Como se mencionó antes, un caso particular de una geometría no-Riemanniana es la geometría de Weyl. En esta geometría se introduce un campo de 1-formas  $\tilde{\sigma}$  de tal manera

que ahora la condición de no-metricidad es dada por

$$\frac{D}{d\lambda}g(\bar{V}, \bar{U}) = \tilde{\sigma} \left( \frac{d}{d\lambda} \right) g(\bar{V}, \bar{U}). \quad (2.3.3)$$

Es claro ver en esta condición que la no-metricidad depende de un campo de 1-formas. En una carta coordenada la ecuación (2.3.3) nos da la forma

$$\nabla_{\mu} g_{\alpha\beta} = \tilde{\sigma}_{\mu} g_{\alpha\beta}. \quad (2.3.4)$$

Para poder apreciar los reescalamientos del producto escalar entre dos campos vectoriales que caracterizan esta nueva geometría, solo es necesario resolver la ecuación diferencial (2.3.3), cuya solución resulta

$$g(\bar{V}(\lambda), \bar{U}(\lambda)) = g(\bar{V}(\lambda_0), \bar{U}(\lambda_0)) e^{\int_{c'} \tilde{\sigma}(\frac{d}{d\lambda}) d\lambda}. \quad (2.3.5)$$

Esta expresión nos dice que el producto escalar de dos vectores  $\bar{U}(\lambda)$  y  $\bar{V}(\lambda)$  a lo largo de una curva  $\Gamma(\lambda)$  cambia, y este cambio depende de la curva misma.

Una de las consecuencias de (2.3.5) recae en la longitud de un vector. Ésta se calcula mediante la fórmula

$$L^2 = \|\bar{V}\|^2 = g(\bar{V}, \bar{V}), \quad (2.3.6)$$

diferenciando esta expresión respecto a  $\lambda$  y empleando (2.3.5) se llega a

$$\frac{dL}{d\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\tilde{\sigma}}{L}. \quad (2.3.7)$$

Particularmente en una carta coordenada se tiene que

$$\frac{dL}{d\lambda} = \frac{\tilde{\sigma}_{\alpha}}{2} \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} L. \quad (2.3.8)$$

Esta expresión indica de manera explícita cómo cambia la longitud de un vector al ser transportado a lo largo de una curva  $\lambda$ .

Si se considera una curva cerrada  $c'(\lambda)$ , *i.e.*,  $\lambda_0 = \lambda$  en la ecuación (2.3.5) se obtiene

$$g(\bar{V}(\lambda), \bar{U}(\lambda)) = g(\bar{V}(\lambda_0), \bar{U}(\lambda_0)) e^{\oint_{c'} \tilde{\sigma}(\frac{d}{d\lambda}) d\lambda}. \quad (2.3.9)$$

Einstein hizo notar que si la idea de una longitud de escala no integrable es correcta, entonces el comportamiento de los relojes dependerá de su historia, lo que conocemos

ahora como el problema del segundo reloj. Consideremos dos relojes atómicos idénticos en un mismo punto y trasladémoslos por trayectorias diferentes, al hacerlos coincidir nuevamente, de acuerdo con (2.3.9) estos serían diferentes puesto que su longitud depende de la trayectoria, y se tendría un segundo más grande que otro.

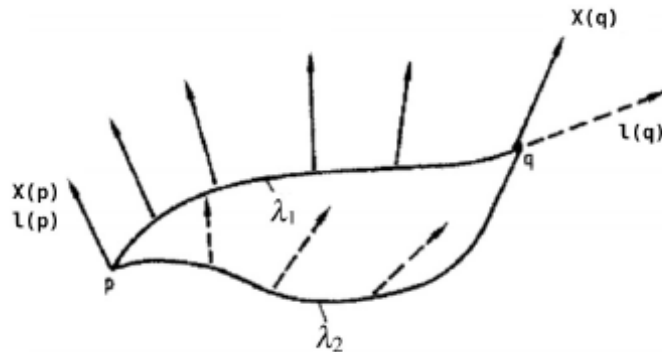


Figura 2.1: Problema del segundo reloj

Pasaron 10 años para que Weyl resolviera este problema, lo hizo proponiendo que la 1-forma sea el gradiente de un campo escalar  $\phi$ , es decir  $\tilde{\sigma}_\alpha = \phi_{,\alpha}$ . Por tanto, por el teorema de Stokes, se sigue que

$$\oint \tilde{\sigma} \left( \frac{d}{d\lambda} \right) d\lambda = 0, \quad (2.3.10)$$

y así se llega a

$$g(\bar{V}(\lambda), \bar{U}(\lambda)) = g(\bar{V}(\lambda_0), \bar{U}(\lambda_0)). \quad (2.3.11)$$

Al transportar dos vectores a lo largo de una curva cerrada, el producto escalar no se altera, manteniendo la longitud de los vectores y resolviendo así el problema del segundo reloj.

A esta nueva geometría se le llamó *Geometría de Weyl-Integrable* cuya condición de no-metricidad se obtiene de reemplazar simplemente el campo de 1-formas por el gradiente del campo escalar

$$\frac{D}{d\lambda} g(\bar{V}, \bar{U}) = \frac{D}{d\lambda} \phi(x(\lambda)) g(\bar{V}, \bar{U}). \quad (2.3.12)$$

---

Particularmente en una carta coordenada resulta

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = \phi_{,\alpha} g_{\mu\nu}, \quad (2.3.13)$$

que es la nueva condición de no-metricidad para dicha geometría. Puede verse fácilmente que este tipo de geometría es un caso particular de geometría con no-metricidad escalar. Por otro lado, la condición de no-metricidad (2.3.13) resulta ser invariante bajo el grupo de transformaciones

$$\bar{g}_{\mu\nu} = e^f g_{\mu\nu}, \quad \bar{\phi} = \phi + f, \quad (2.3.14)$$

donde  $f(x^{\sigma})$  es una función escalar por lo menos de clase  $C^1$ . La primera transformación es conocida como transformación conforme de la métrica y se interpreta geoméricamente como rescalamientos globales del espacio-tiempo. La segunda transformación es solo una transformación tipo traslacional del campo de Weyl  $\phi$ .

## 2.4. Conexión de Weyl.

De igual forma que el teorema de Levi- Civita en la geometría de Riemann aseguraba que existe una única conexión afín. Siendo esta conexión afín simétrica y compatible con el tensor métrico. En la geometría de Weyl- Integrable tenemos la extensión del teorema, donde también se asegura que existe una única conexión afín, simétrica y es compatible con el tensor métrico.

**Teorema 2.4.1.** *(Generalización del teorema de Levi-Civita) En un espacio-tiempo caracterizado por la condición de no metricidad escalar*

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = \phi_{,\alpha} g_{\mu\nu} \quad (2.4.1)$$

*existe una única conexión afín  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}$  para un campo escalar satisface*

1.  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}$  es simétrica.
2.  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}$  es compatible con la métrica  $g$ .



---

*Demostración.* La derivada covariante de la métrica es

$$\nabla_{\alpha}g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu,\alpha} - g_{\sigma\nu}\Gamma_{\mu\alpha}^{\sigma} - g_{\mu\sigma}\Gamma_{\nu\alpha}^{\sigma} = \phi_{,\alpha}g_{\mu\nu}, \quad (2.4.2)$$

permutando los índices  $\alpha\mu\nu$  por  $\mu\nu\alpha$

$$\nabla_{\mu}g_{\nu\alpha} = g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\sigma\alpha}\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - g_{\nu\sigma}\Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma} = \phi_{,\mu}g_{\nu\alpha}, \quad (2.4.3)$$

ahora permutando los índices  $\alpha\mu\nu$  por  $\nu\alpha\mu$

$$\nabla_{\nu}g_{\alpha\mu} = g_{\alpha\mu,\nu} - g_{\sigma\mu}\Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma} - g_{\alpha\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \phi_{,\nu}g_{\alpha\mu}, \quad (2.4.4)$$

ahora sumamos (2.4.2),(2.4.3) y restamos (2.4.4) y así obtenemos

$$g_{\mu\nu,\alpha} + g_{\nu\alpha,\mu} + g_{\alpha\mu,\nu} = 2g_{\beta\nu}\Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} + \phi_{,\alpha}g_{\mu\nu} + \phi_{,\mu}g_{\nu\alpha} - \phi_{,\nu}g_{\alpha\mu}, \quad (2.4.5)$$

despejando finalmente tenemos

$$\Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} = \frac{1}{2}g^{\beta\nu} (g_{\mu\nu,\alpha} + g_{\nu\alpha,\mu} + g_{\alpha\mu,\nu}) - \frac{1}{2}g^{\beta\nu} (\phi_{,\alpha}g_{\mu\nu} + \phi_{,\mu}g_{\nu\alpha} - \phi_{,\nu}g_{\alpha\mu}). \quad (2.4.6)$$

□

Éstas son las componentes de conexión de la geometría de Weyl-Integrable, en donde la primera parte son los símbolos de Christoffel de la geometría Riemanniana y el segundo término tiene la contribución del campo escalar.

De momento, se han establecido las bases de la geometría diferencial que nos permitirán entender los fundamentos de las teorías escalares-tensoriales, donde estas son formuladas en una geometría de Riemann. En la siguiente sección abordaremos las teorías escalares-tensoriales.

## 2.5. Teorías escalares-tensoriales de Gravitación.

A pesar de que la teoría de la relatividad general es actualmente la descripción más acertada de la gravedad y ha superado una amplia variedad de pruebas experimentales,

---

han habido distintas teorías que intentan reproducir los hallazgos de la relatividad de Einstein pero incorporando diversos elementos para describir el campo gravitacional (en lugar de únicamente el tensor métrico) como, por ejemplo, campos escalares. En particular, una de las motivaciones más fuertes para modificar la teoría general de la relatividad, es la de incorporar de manera explícita el principio de Mach. La idea detrás de dicho principio es que la rotación absoluta (vista como la distinción entre marcos de referencia inerciales locales y marcos de referencia rotantes) es determinada por la distribución a gran escala de materia.

Al introducir el principio de Mach surge una de las teorías gravitacionales alternativas a la relatividad general que han servido de prototipo para nuevas teorías de la gravedad, a saber, la teoría de gravitación de Jordan-Fierz-Brans-Dicke [35]-[38] comúnmente conocida como teoría de Brans-Dicke (BD). Dicha teoría describe la gravedad, interactuando con materia, mediante la acción

$$S^{(BD)} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right] + S^{(m)}, \quad (2.5.1)$$

donde  $\omega$  es un parámetro adimensional constante,  $\phi$  es un campo escalar y

$$S^{(m)} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}^{(m)}, \quad (2.5.2)$$

donde la acción describe cualquier forma de materia diferente del campo escalar  $\phi$ . En esta acción, la materia no está directamente acoplada a  $\phi$ , en el sentido de que la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}^{(m)}$  no depende de  $\phi$ . Sin embargo,  $\phi$  está directamente acoplado al escalar de Ricci y por tanto, el campo gravitacional se describe mediante el tensor  $g_{\alpha\beta}$  y por el campo escalar  $\phi$ .

En este tipo de teorías se impone una geometría de fondo de Riemann, es decir,  $\nabla_\lambda g_{\alpha\beta} = 0$ . Al variar la acción respecto al tensor métrico obtenemos

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= \frac{8\pi}{\phi} T_{\alpha\beta}^{(m)} + \frac{\omega}{\phi^2} \left( \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi \right) \\ &+ \frac{1}{\phi} (\nabla_\alpha \nabla_\beta \phi - g_{\alpha\beta} \square \phi) - \frac{V}{2\phi} g_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

donde

$$T_{\alpha\beta}^{(m)} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\alpha\beta}} (\sqrt{-g} \mathcal{L}^{(m)}) \quad (2.5.4)$$

es el tensor de energía-momento asociado a la materia ordinaria. Además, se hace la variación de la acción con respecto al campo  $\phi$ , para el cual se obtiene la ecuación

$$\frac{2\omega}{\phi} \square\phi + R - \frac{\omega}{\phi^2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi - \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.5.5)$$

Esta ecuación puede reducirse, utilizando la ecuación (2.5.3) a

$$\square\phi = \frac{1}{2\omega + 3} \left[ 8\pi T^{(m)} + \phi \frac{dV}{d\phi} - 2V \right]. \quad (2.5.6)$$

Por la ecuación (2.5.6), el escalar  $\phi$  tiene materia no conforme como su fuente, pero el escalar no está directamente acoplado a  $T_{\alpha\beta}^{(m)}$  o  $\mathcal{L}^{(m)}$ . El campo  $\phi$  actúa nuevamente en la materia ordinaria solo a través del tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$  de la manera descrita por la ecuación (2.5.3). El término proporcional a  $\phi dV/d\phi - 2V$  en el lado derecho de la ecuación (2.5.6) desaparece si el potencial  $V(\phi)$  consiste en un término de masa pura.

Las teorías escalares-tensoriales de la gravedad [41, 44, 45, 50] generalizan la teoría de Brans-Dicke y se describen por la acción

$$S^{(ST)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{f(\phi)}{2} R - \frac{\omega(\phi)}{2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi - V(\phi) \right] + S^{(m)}, \quad (2.5.7)$$

donde  $S^{(m)} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}^{(m)}$  no depende explícitamente del campo escalar  $\phi$ . La característica distintiva de la acción (2.5.7) es que el parámetro  $\omega(\phi)$  de la teoría de Brans-Dicke es ahora una función escalar tipo BD y por lo tanto varía punto a punto en el espacio-tiempo. En el universo espacialmente homogéneo e isotrópico apropiado para la cosmología,  $\omega$  solo varía con el tiempo cósmico.

El potencial de campo escalar  $V(\phi)$  constituye una generalización natural de la constante cosmológica y puede reducirse a una constante, o a un término de masa; a veces se incluye cuando se estudia el universo temprano o el universo acelerado actual.

La acción (2.5.7) contiene la acción de BD (2.5.1) como caso especial

$$f(\phi) = \frac{\phi}{8\pi}, \quad \omega(\phi) = \frac{\omega_0}{8\pi\phi}, \quad (2.5.8)$$

donde  $\omega_0$  es una constante y el potencial es reescalado por un factor  $16\pi$ .

Existen varias formas para presentar teorías escalares-tensoriales. Una forma alternativa de la acción (2.5.7) que a menudo se encuentra en la literatura es

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi - V(\phi) \right] + S^{(m)}. \quad (2.5.9)$$

Esta acción se puede presentar con un término canónico de energía cinética para un campo escalar  $\varphi$  diferente,

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ f(\varphi) R - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \varphi \nabla_\beta \varphi - U(\varphi) \right] + S^{(m)}, \quad (2.5.10)$$

estableciendo

$$\phi = f(\varphi), \quad (2.5.11)$$

donde la función  $f$  está definida por la ecuación

$$\omega(\phi) = \frac{f(\varphi)}{2(df/d\varphi)^2} \quad (2.5.12)$$

y

$$U(\varphi) = V[f(\varphi)]. \quad (2.5.13)$$

La forma alternativa de la acción (2.5.10) puede obtenerse cuando la función  $f(\varphi)$  tiene inversa continua  $f^{-1}$ . Para este caso, las ecuaciones de campo obtenidas al variar la acción (2.5.9) son

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R &= \frac{8\pi}{\phi} T_{\alpha\beta}^{(m)} + \frac{\omega(\phi)}{\phi^2} \left( \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi \right) \\ &+ \frac{1}{\phi} (\nabla_\alpha \nabla_\beta \phi - g_{\alpha\beta} \square \phi) - \frac{V}{2\phi} g_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

$$\square \phi = -\frac{8\pi}{2\omega} \left( R - \frac{dV}{d\phi} \right) - \frac{1}{2} (\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi) \left( \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{d\phi} - \frac{1}{\phi} \right). \quad (2.5.15)$$

La traza de la ecuación (2.5.14) nos lleva a

$$R = -\frac{8\pi}{\phi} T^{(m)} + \frac{\omega}{\phi^2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + 3 \frac{\square \phi}{\phi} + \frac{2V}{\phi}. \quad (2.5.16)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.5.15) se obtiene

$$\square \phi = \frac{1}{2\omega + 3} \left( 8\pi T^{(m)} - \frac{d\omega}{d\phi} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + \phi \frac{dV}{d\phi} - 2V \right). \quad (2.5.17)$$

---

La materia ordinaria satisface la ecuación de conservación

$$\nabla^\beta T_{\alpha\beta}^{(m)} = 0. \quad (2.5.18)$$

Hasta este momento hemos considerado que la geometría de fondo apropiada es la de Riemann, pero esto no lo podemos dar por hecho, sino que hacemos uso del formalismo de Attilio Palatini que nos permitiera derivar de la acción la información de la geometría de fondo apropiada para una acción dada. En la siguiente sección abordaremos este principio variacional de una una teoría escalar-tensorial.

## 2.6. Geometría de fondo de una teoría escalar-tensorial.

El procedimiento variacional de Palatini se basa en la idea de tratar a la métrica y la conexión afín como variables dinámicas, en principio independientes, para una lagrangiana dada.

Retomando la acción escalar-tensorial en (2.5.9), se tiene una densidad lagrangiana dada por

$$\mathcal{L} = \phi g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi - V(\phi), \quad (2.6.1)$$

donde el tensor de Ricci se define como

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta,\mu}^\mu - \Gamma_{\alpha\mu,\beta}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\mu - \Gamma_{\alpha\mu}^\nu \Gamma_{\beta\nu}^\mu. \quad (2.6.2)$$

Sustituyendo (2.6.2) en (2.6.1) se obtiene

$$\mathcal{L} = \phi g^{\alpha\beta} (\Gamma_{\alpha\beta,\mu}^\mu - \Gamma_{\alpha\mu,\beta}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\mu - \Gamma_{\alpha\mu}^\nu \Gamma_{\beta\nu}^\mu) - \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi - V(\phi). \quad (2.6.3)$$

La variación con respecto a  $\Gamma_{\beta\alpha}^\mu$  de la acción, bajo la condición de acción estacionaria nos lleva a

$$\delta S = \frac{1}{16\pi} \int_\Omega d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \phi \delta R_{\alpha\beta}. \quad (2.6.4)$$

Utilizando la identidad de Palatini dada por

$$\delta R_{\alpha\beta} = \nabla_\mu (\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu) - \nabla_\beta (\delta \Gamma_{\alpha\mu}^\mu), \quad (2.6.5)$$

---

en (2.6.4) se obtiene

$$\delta S = \frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \phi g^{\alpha\beta} [\nabla_{\mu} (\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}) - \nabla_{\beta} (\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\mu})]. \quad (2.6.6)$$

Integrando por partes y eliminando el término de divergencia nos da

$$\delta S = \frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} [(\delta^{\beta}_{\mu} \nabla_{\nu} (\phi g^{\alpha\nu}) - \nabla_{\mu} (\phi g^{\alpha\beta})) \delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}]. \quad (2.6.7)$$

Variando la acción respecto a la conexión afín siguiendo un principio variacional de Palatini, se obtiene [31]

$$\nabla_{\mu} g_{\alpha\beta} = -(\ln \phi)_{,\mu} g_{\alpha\beta}. \quad (2.6.8)$$

Mediante la transformación  $\phi = e^{-\varphi}$  puede verse que la relación (2.6.8) corresponde a la condición de no-metricidad de una geometría de Weyl-Integrable. Así, vemos que el procedimiento variacional de Palatini nos revela que la geometría de fondo apropiada o natural para la acción escalar-tensorial es de Weyl-Integrable.

En el siguiente capítulo vamos a construir un modelo de inflación tipo Higgs que sea compatible con su geometría de fondo.

# Capítulo 3

## Modelo de Inflación Tipo Higgs

### 3.1. Introducción.

En este capítulo proponemos un modelo de inflación tipo Higgs a partir de una teoría de gravitación con un acoplamiento no-mínimo entre el campo escalar y la gravedad. Una diferencia importante con otros modelos es que no asumiremos una geometría de fondo a priori, sino que emplearemos el principio de Palatini para determinar la geometría de fondo apropiada para nuestro modelo. Comenzaremos con el formalismo matemático general para posteriormente proponer un modelo particular mediante la introducción del potencial de Higgs.

### 3.2. Ecuaciones de campo en una geometría de Weyl-Integrable

Comenzaremos considerando la funcional de acción para un campo escalar no-minimamente acoplado a la gravedad en la forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{\Omega(\Phi)R}{16\pi G} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Phi\partial_\beta\Phi + U(\Phi) \right], \quad (3.2.1)$$

en donde  $\Phi$  representa el campo escalar inflatón,  $R$  es el escalar de curvatura de Ricci,  $g_{\mu\nu}$  denota las componentes coordinadas del tensor métrico,  $U(\Phi)$  es el potencial asociado a  $\Phi$

y  $g = \det(g_{\alpha\beta})$  es el determinante de la representación matricial del tensor métrico. Ahora, de acuerdo al principio de Palatini, no existe una conexión afín determinada a priori sino que ésta queda determinada por la derivada funcional de la acción (3.2.1) respecto a la conexión afín, i.e.  $\delta S/\delta\Gamma_{\lambda\gamma}^\sigma = 0$ . Así, el principio variacional de Palatini nos lleva a la condición de compatibilidad

$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = -\partial_\mu[\ln \Omega(\Phi)] g_{\alpha\beta}, \quad (3.2.2)$$

donde  $\nabla$  denota la derivada covariante respecto a la conexión afín determinada por (3.2.2). Mediante la transformación  $\Omega(\Phi) = e^{-\phi}$  puede verse que la relación (3.2.2) corresponde a la condición de no-metricidad de una geometría de Weyl-Integrable y por tanto es esa la geometría de fondo que debe ser asociada a la acción (3.2.1). Esta acción escrita en términos del campo de Weyl  $\phi$  tiene la forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ e^{-\phi} \left( \frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{2} e^\phi (z'(\phi))^2 g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi \right) + U(\Phi(\phi)) \right], \quad (3.2.3)$$

con  $z(\phi) = \Omega^{-1}(e^{-\phi})$  y la prima denotando en este caso derivada respecto al campo  $\phi$ . Por otro lado, se sigue de (3.2.2) que el grupo de simetrías que preservan la geometría de fondo es dado por el grupo de transformaciones

$$\bar{g}_{\lambda\gamma} = e^{f(x^\sigma)} g_{\lambda\gamma}, \quad (3.2.4)$$

$$\bar{\phi} = \phi + f(x^\sigma), \quad (3.2.5)$$

donde  $f(x^\lambda)$  es una función de clase  $C^\infty(\mathcal{M})$  de las coordenadas del espacio-tiempo  $\mathcal{M}$ . Sin embargo, no es difícil probar que la acción (3.2.3) no es invariante bajo este grupo y por tanto en este caso la acción no es un escalar como es requerido para que la teoría física sea consistente con su geometría de fondo.

Para resolver este problema proponemos la acción invariante

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\phi} \left[ \frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{2} \omega(\phi) g^{\alpha\beta} \phi_{;\alpha} \phi_{;\beta} + U(\phi) \right], \quad (3.2.6)$$

donde  $\omega(\phi) = e^\phi (z'(\phi))^2$  y además hemos introducido la derivada de norma

$$\phi_{;\lambda} = \nabla_\lambda \phi + i\gamma A_\lambda \phi, \quad (3.2.7)$$



siendo  $A_\mu$  un campo de norma definido sobre la variedad  $\mathcal{M}$ , y  $\gamma$  una constante de acoplamiento entre el campo de norma y el campo de Weyl  $\phi$ . De esta manera la acción (3.2.6) resulta ser un escalar bajo el grupo (3.2.4)-(3.2.5) cuando se verifican las ecuaciones

$$\bar{\phi}\bar{A}_\lambda = \phi A_\lambda + i\gamma^{-1}\partial_\lambda f, \quad (3.2.8)$$

$$\bar{U}(\bar{\phi}) = U(\bar{\phi} - f) = U(\phi), \quad (3.2.9)$$

$$\bar{\omega}(\bar{\phi}) = \omega(\bar{\phi} - f) = \omega(\phi). \quad (3.2.10)$$

La ecuación (3.2.8) corresponde con la regla de transformación de los elementos del álgebra del grupo  $U(1)$  para  $\phi A_\mu$ . Este grupo se asocia con la interacción electromagnética y por tanto resulta natural asociar el campo vectorial de norma  $A_\mu$  con el 4-potencial electromagnético. Por tanto, haciendo esta suposición, podemos dar dinámica a este campo de norma mediante la inclusión de un término adicional en la acción (3.2.6) generando así la acción extendida

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\phi} \left[ \frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{2}\omega(\phi)g^{\alpha\beta}\phi_{:\alpha}\phi_{:\beta} + U(\phi)e^{-\phi} - \frac{1}{4}e^\phi g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \right], \quad (3.2.11)$$

donde  $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$  es el tensor de intensidad electromagnética, siendo  $\nabla$  la conexión afín Weyliana. Las ecuaciones de campo derivadas de la acción (3.2.11) tienen la forma

$$\begin{aligned} & e^{-\phi} {}^{(w)}G_{\alpha\beta} + 2e^{-\phi} (\nabla_\alpha \nabla_\beta \phi - 2\nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi + 2g_{\alpha\beta} \nabla_\sigma \phi \nabla^\sigma \phi - g_{\alpha\beta} {}^{(w)}\square\phi) \\ & = 8\pi G e^{-\phi} \left[ \omega(\phi)\phi_{:\alpha}\phi_{:\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta} (\omega\phi^{:\sigma}\phi_{:\sigma} - 2U(\phi)e^{-\phi}) \right] + 8\pi G (g^{\nu\mu}F_{\alpha\nu}F_{\beta\mu} \\ & - \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

$$\begin{aligned} & (\omega'(\phi) - \omega(\phi)) \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi + \omega(\phi)\square\phi + \gamma (\omega'(\phi) - \omega(\phi)) \varphi \nabla^\alpha \phi A_\alpha + \gamma \phi \omega(\phi) \mathcal{D}_\alpha A^\alpha \\ & - \frac{{}^{(w)}R}{16\pi G} + \frac{1}{2} (\omega(\phi) - \omega'(\phi)) \varphi^{:\alpha}\phi_{:\alpha} + e^{-\phi}(U'(\phi) - 2U(\phi)) = 0, \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

$$\mathcal{D}_\alpha F^{\alpha\beta} = \gamma e^{-\phi} \omega(\phi) \phi^{:\beta}, \quad (3.2.14)$$

donde  ${}^{(w)}R$  y  ${}^{(w)}G_{\alpha\beta}$  son el escalar de curvatura y el tensor de Einstein calculados con la conexión de Weyl,  $\mathcal{D}_\alpha$  es la derivada covariante calculada con la conexión de Levi-Civita,

---

$\square$  denota al operador D'Alambertiano riemanniano,  ${}^{(w)}\square$  es el operador D'Alambertiano weyliano y la prima indica en esta ecuación derivada respecto al campo escalar  $\phi$ .

Calculando la traza de la ecuación (3.2.12) y sustituyendo en (3.2.13) nos lleva a

$$\begin{aligned} & \left( \omega'(\phi) - \omega(\phi) - \frac{5}{8\pi G} \right) \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi + \left( \omega(\phi) - \frac{3}{8\pi G} \right) \square \phi + \gamma (\omega'(\phi) - \omega(\phi)) (\nabla_\alpha \phi) (\phi A^\alpha) \\ & + \gamma \omega(\phi) (\mathcal{D}_\mu (\phi A^\mu) - \nabla_\mu (\ln \phi) \phi A^\mu) - \left( \omega(\phi) - \frac{1}{2} \omega'(\phi) \right) \phi^{;\alpha} \phi_{;\alpha} + e^{-\phi} U'(\phi) = 0. \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Las ecuaciones de campo (3.2.12), (3.2.14) y (3.2.15) son válidas en una geometría de fondo de Weyl-integrable, pues provienen de una acción invariante bajo el grupo de simetrías de esa geometría. En la siguiente sección obtendremos la forma de estas ecuaciones para una métrica invariante bajo transformaciones de Weyl.

### 3.3. Ecuaciones de Campo para la métrica invariante

En la sección anterior vimos que de acuerdo al grupo de transformaciones de Weyl (3.2.4) y (3.2.5) la métrica no es invariante, y por tanto el elemento diferencial de línea tampoco lo es. Esto implica que las unidades de medida físicas serían unidades que dependerían de una elección de la función  $f(x^\sigma)$ , y en ese sentido las longitudes no serían invariantes. Para resolver este problema, introduciremos una métrica invariante bajo el grupo de transformaciones de Weyl.

De acuerdo a (3.2.4) el elemento diferencial de línea se transforma con la regla

$$d\bar{s}^2 = e^f ds^2. \quad (3.3.1)$$

Emplearemos ahora la métrica efectiva  $h_{\mu\nu} = e^{-\phi} g_{\mu\nu}$ . Así, con ayuda de (3.2.4) y (3.2.5) no es difícil verificar que

$$d\bar{s}^2(\bar{h}) = \bar{h}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = ds^2. \quad (3.3.2)$$

Esto implica que la métrica efectiva  $h_{\mu\nu}$  es invariante bajo el grupo de transformaciones de Weyl. En términos de la métrica invariante  $h_{\alpha\beta}$  la acción (3.2.11) se escribe

$$S(h) = \int d^4x \sqrt{-h} \left[ \frac{R(h)}{16\pi G} - \frac{1}{2} \omega(\phi) h^{\alpha\beta} \phi_{;\alpha} \phi_{;\beta} + U(\phi) - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right]. \quad (3.3.3)$$

Las ecuaciones de campo derivadas de esta acción son

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G \left[ \omega(\phi) \phi_{;\alpha} \phi_{;\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\omega(\phi) \phi^{;\sigma} \phi_{;\sigma} - 2U(\phi)) \right] + 8\pi G (g^{\nu\mu} F_{\alpha\nu} F_{\beta\mu} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}), \quad (3.3.4)$$

$$\omega(\phi) \square \phi + \frac{1}{2} \omega'(\phi) h^{\mu\nu} \mathcal{D}_\mu \phi \mathcal{D}_\nu \phi + U'(\phi) = 0, \quad (3.3.5)$$

$$\mathcal{D}_\alpha F^{\alpha\beta} = \gamma \omega(\phi) \phi^{;\beta}. \quad (3.3.6)$$

Estas ecuaciones describen la dinámica de los campos escalar y de norma con respecto a la métrica invariante que claramente satisface:  $\mathcal{D}_\alpha h_{\mu\nu} = 0$ .

### 3.4. Ecuaciones dinámicas para el modelo de inflación tipo Higgs

Como en cualquier modelo cosmológico, un principio cosmológico debe estar vigente. Así, nosotros asumiremos que nuestro universo observable es espacialmente homogéneo e isotrópico a gran escala, entendiéndose por esta última la escala cosmológica. Y en esa dirección dado que el campo de norma  $A_\mu$  consiste en las componentes coordenadas de un campo de 1-formas en la variedad, se trata de un campo que no cumple con el principio cosmológico pues necesariamente conlleva a una dirección privilegiada. Sin embargo, recordemos que se trata de un campo de norma y por tanto existe una norma bajo la cual este campo es nulo. Esa elección de norma es dada por

$$\partial_\lambda f = -i\gamma \phi A_\lambda. \quad (3.4.1)$$

Bajo la norma (3.4.1), la acción (3.3.3) se transforma en

$$S(h) = \int d^4x \sqrt{-h} \left[ \frac{R(h)}{16\pi G} - \frac{1}{2} \omega(\phi) h^{\alpha\beta} \phi_{;\alpha} \phi_{;\beta} + U(\phi) \right]. \quad (3.4.2)$$

Ahora consideramos el potencial de Higgs 1-paramétrico dado por

$$U(\phi) = \frac{\lambda}{4} \left( \frac{\phi^2}{\xi} - \sigma^2 \right)^2, \quad (3.4.3)$$

donde  $\lambda = 0,129$ , el valor esperado del vacío para la interacción electrodébil resulta ser  $\sigma = 246 \text{ GeV}$  y  $\xi$  es un parámetro que determina el rescalamiento del potencial durante inflación. El mínimo del potencial se da cuando  $\|\phi^2\| = \sqrt{\xi}\sigma$ , y por tanto es válida la expansión alrededor de este mínimo

$$\phi(x^\mu) = \sqrt{\xi}\sigma + \zeta(x^\mu), \quad (3.4.4)$$

donde  $\zeta$  es el campo escalar de Higgs. Implementando (3.4.4) en (3.4.2) obtenemos

$$S(h) = \int d^4x \sqrt{-h} \left[ \frac{R(h)}{16\pi G} - \frac{1}{2} \omega_{eff}(\zeta) h^{\alpha\beta} \zeta_{,\alpha} \zeta_{,\beta} + V(\zeta) \right], \quad (3.4.5)$$

siendo  $V(\zeta) = U(\sqrt{\xi}\sigma + \zeta)$ . Ahora para tener un término cinético canónico en la acción (3.4.2) empleamos la transformación

$$\varphi(x^\sigma) = \int \sqrt{\omega_{eff}(\zeta)} d\zeta. \quad (3.4.6)$$

Así, la ecuación (3.4.5) se escribe

$$S(h) = \int d^4x \sqrt{-h} \left[ \frac{R(h)}{16\pi G} - \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta} + V_{eff}(\varphi) \right], \quad (3.4.7)$$

donde

$$V_{eff}(\varphi) = \frac{\lambda}{4} \left[ \frac{(\sqrt{\xi}\sigma + \zeta(\varphi))^2}{\xi} - \sigma^2 \right]^2. \quad (3.4.8)$$

De esta manera, las ecuaciones de campo derivadas de la acción (3.4.7) tienen la forma

$$G_{\alpha\beta} = -8\pi G \left[ \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta} - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} (\varphi^{,\mu} \varphi_{,\mu} + 2V_{eff}(\varphi)) \right], \quad (3.4.9)$$

$$\square \varphi + V'_{eff}(\varphi) = 0, \quad (3.4.10)$$

donde  $\square$  es el operador D'alambertiano para la métrica  $h_{\alpha\beta}$ .

---

Para implementar el modelo inflacionario consideramos el elemento diferencial de línea correspondiente a una métrica del tipo Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) escrita como

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (3.4.11)$$

siendo  $a(t)$  el factor de escala cósmico. Ahora, sabemos que el campo escalar inflatón, que en este caso es el de Higgs, puede expresarse a través de una expansión semi-clásica en la forma

$$\varphi(x^\lambda) = \varphi_c(t) + \delta\varphi(x^\lambda), \quad (3.4.12)$$

donde  $\varphi_c(t)$  describe la contribución del inflatón a escalas cosmológicas, mientras que  $\delta\varphi(x^\lambda)$  representa las fluctuaciones cuánticas de este campo que satisfacen los valores esperados  $\langle \delta\varphi \rangle = 0$  y  $\langle \delta\varphi^2 \rangle \neq 0$ . De esta manera, se sigue de las ecuaciones (3.4.10)-(3.4.12) que las ecuaciones que gobiernan la dinámica del inflatón tanto para la parte clásica como la cuántica respectivamente, son dadas por

$$\ddot{\varphi}_c + 3H\dot{\varphi}_c + V'_{eff}(\varphi_c) = 0, \quad (3.4.13)$$

$$\ddot{\delta\varphi} + 3H\dot{\delta\varphi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\delta\varphi + V''_{eff}(\varphi_c)\delta\varphi = 0, \quad (3.4.14)$$

con  $H(t) = \dot{a}/a$  siendo el parámetro de Hubble. Análogamente, de las ecuaciones (3.4.9)-(3.4.12) obtenemos

$$H^2 = \frac{\rho_c}{3M_p^2}, \quad (3.4.15)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_p^2}(\rho_c + p_c), \quad (3.4.16)$$

donde usamos la convención para la masa de Planck  $M_p = (8\pi G)^{-1/2} = 2,45 \cdot 10^{18} \text{ GeV}$ , asumiendo el contenido del universo como un fluido perfecto las densidades de energía y presión son dadas respectivamente por  $\rho_c = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_c^2 + V_{eff}(\varphi_c)$  y  $p_c = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_c^2 - V_{eff}(\varphi_c)$ . El parámetro de la ecuación de estado para tales densidades de energía y presión bajo la condición de rodadura lenta del campo hacia el mínimo del potencial  $\frac{1}{2}\dot{\varphi}_c^2 \ll V_{eff}(\varphi_c)$  es dado por

$$\omega_\varphi = \frac{p_c}{\rho_c} \simeq -1. \quad (3.4.17)$$

---

Esta ecuación de estado corresponde a un material que ejerce una presión negativa sobre el espacio generando la expansión acelerada característica del período de inflación temprana en el universo. La idea ahora es encontrar soluciones tanto a escala cosmológica como cuántica que describan la dinámica del inflatón y así poder evaluar la viabilidad de un modelo de Higgs durante inflación. En la siguiente sección comenzaremos con la dinámica clásica.

### 3.5. Soluciones a escala cosmológica

En esta sección obtendremos soluciones para la parte clásica, es decir, la parte del campo inflatón válida a escalas cosmológicas. Así, se sigue de (3.4.13) y (3.4.15) que

$$\dot{\varphi}_c = -\frac{M_p}{\sqrt{3}} \frac{V'_{eff}(\varphi_c)}{\sqrt{V_{eff}(\varphi_c)}}. \quad (3.5.1)$$

Para desarrollar el modelo de inflación tipo Higgs consideramos el anzats

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{[1 - \beta^2(\sqrt{\xi}\sigma + \zeta)^4]^{5/2}}, \quad (3.5.2)$$

donde  $\beta$  es un parámetro con unidades de  $M_p^{-2}$ . Por tanto, de acuerdo a la fórmula (3.4.6) se tiene que

$$\varphi = \frac{\sqrt{\xi}\sigma + \zeta}{[1 - \beta^2(\sqrt{\xi}\sigma + \zeta)^4]^{1/4}}. \quad (3.5.3)$$

La expresión (3.5.2) también puede ser escrita en términos de  $\phi$  como

$$\omega(\phi) = \left( \frac{1}{1 - \beta^2\phi^4} \right)^{5/2}. \quad (3.5.4)$$

De esta manera, empleando la definición de  $\omega(\phi)$  en función de  $z(\phi)$  obtenemos

$$\frac{dz(\phi)}{d\phi} = \frac{e^{-\frac{\phi}{2}}}{(1 - (\sqrt{\beta}\phi)^4)^{5/4}}. \quad (3.5.5)$$

Para tener un escenario inflacionario exitoso se requiere que el campo escalar cumpla con  $\phi \ll 1 M_p$ . Así, inflación ocurre cuando  $\phi \ll 1/\sqrt{\beta}$ . Con esto, una expansión en serie del lado derecho de (3.5.5) nos lleva a

$$\frac{dz(\phi)}{d\phi} = 1 - \frac{1}{2}\phi. \quad (3.5.6)$$

---

Resolviendo la ecuación (3.5.6) encontramos que

$$z(\phi) = -\frac{1}{4}\phi^2 + \phi. \quad (3.5.7)$$

Usando el hecho de que  $z(\phi) = \Omega^{-1}(\Phi)$ , obtenemos que

$$\Omega(\Phi) = 2 \pm \sqrt{1 - \Phi}. \quad (3.5.8)$$

Este es el acoplamiento entre el campo escalar  $\Phi$  y la gravedad que corresponde a un potencial inflacionario tipo Higgs.

Con ayuda de (3.5.3) el potencial inflacionario efectivo (3.4.8) puede escribirse como

$$V_{eff}(\varphi) = \frac{\lambda}{4\xi^2} \left( \frac{\varphi^4}{1 + \beta^2\varphi^4} \right). \quad (3.5.9)$$

En el límite cuando  $\beta\varphi^2 \ll 1$ , este potencial se reduce a

$$V_{eff}(\varphi) = \frac{\lambda}{4\xi^2}\varphi^4. \quad (3.5.10)$$

Empleando (3.5.10) en (3.5.1) obtenemos para la parte clásica del campo  $\varphi_c(t)$  la expresión

$$\varphi_c(t) = \varphi_e e^{2M_p \sqrt{\frac{\lambda}{3\xi^2}}(t_e - t)}, \quad (3.5.11)$$

donde  $t_e$  denota el tiempo al que termina inflación. Así, usando (3.4.15), (3.5.10) y (3.5.11) obtenemos para el factor de escala

$$a = a_e \exp \left[ \frac{\varphi_e^2}{8M_p^2} \left( 1 - \exp \left( 4M_p \sqrt{\frac{\lambda}{3\xi^2}}(t_e - t) \right) \right) \right], \quad (3.5.12)$$

siendo  $\varphi_e = \varphi(t_e)$ . Vemos así que la expansión del universo durante inflación es super-exponencial pero hacia el final de inflación, es decir, cuando  $t \simeq t_e$  obtenemos

$$a(t) \simeq a_e \exp \left( -\frac{\varphi_e^2}{2M_p} \sqrt{\frac{\lambda}{3\xi^2}} t_e \right) \exp \left( \frac{\varphi_e^2}{2M_p} \sqrt{\frac{\lambda}{3\xi^2}} t \right). \quad (3.5.13)$$

Esta última indica que en el caso de una inflación tipo Higgs la expansión del universo al final de inflación sería exponencial, en otras palabras, una expansión de tipo De-Sitter.

---

Con ayuda de (3.5.12) y sabiendo que de acuerdo a los datos observacionales del PLANCK 2018 una infación tipo Higgs requiere un parámetro de Hubble inicial  $H_0 \simeq 10^{11} \text{ GeV} - 10^{12} \text{ GeV}$  obtenemos

$$H_0 \simeq \frac{\lambda}{2\sqrt{3}} \frac{1}{\beta\xi M_p} \simeq 10^{11} - 10^{12} \text{ GeV}, \quad (3.5.14)$$

donde hemos empleado  $M_h \simeq 125,7 \text{ GeV}$ . Así, usando  $\lambda = 0,13$  y  $M_p = 1,22 \cdot 10^{19} \text{ GeV}$  llegamos a que  $\xi$  debe variar en el intervalo  $[3,7528 \cdot 10^{-14}, 3,7528 \cdot 10^{-13}] (\beta M_p)^{-1} (\text{GeV})^{-1}$ . De esta manera hemos terminado de caracterizar este período de inflación a escala cosmológica. La dinámica cuántica del inflatón será obtenida en la siguiente sección.

### 3.6. Soluciones a escala cuántica

Para determinar la dinámica cuántica del campo inflatón emplearemos un procedimiento de cuantización canónica el campo. Así nuestro punto de partida es la relación de conmutación canónica

$$[\delta\varphi(t, \bar{x}), \Pi_{(\delta\varphi)}^0(t, \bar{x}')] = i\delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}'), \quad (3.6.1)$$

donde  $\Pi_{(\delta\varphi)}^0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta\varphi}}$  es el momento canónico conjugado, que es dado por

$$\Pi_{(\delta\varphi)}^0 = \sqrt{-\hbar} [(\dot{\varphi}_c + \dot{\delta\varphi})]. \quad (3.6.2)$$

Sustituyendo (3.6.2) en (3.6.1) obtenemos

$$[\delta\varphi(t, \bar{x}), \dot{\delta\varphi}(t, \bar{x}')] = \frac{i}{\sqrt{-\hbar}} \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}'). \quad (3.6.3)$$

Ahora consideramos la expansión de Fourier

$$\delta\varphi(t, \bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\frac{3}{2} \int H(t) dt\right) \int d^3k \left[ a_k e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}} \eta_k(t) + a_k^\dagger e^{-i\bar{k}\cdot\bar{x}} \eta_k^*(t) \right], \quad (3.6.4)$$

donde  $a_k^\dagger$  y  $a_k$  son los operadores de creación y aniquilación y la operación  $\dagger$  indica transpuesto conjugado. Las cantidades  $\eta_k(t)$  y su complejo conjugado son los modos cuánticos



de oscilación asociados a las fluctuaciones cuánticas del inflatón  $\delta\varphi$ . Los operadores de creación y aniquilación satisfacen las relaciones de conmutación

$$\left[ a_k, a_{k'}^\dagger \right] = i\delta^{(3)}(\bar{k} - \bar{k}'), \quad \left[ a_k, a_{k'} \right] = \left[ a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger \right] = 0. \quad (3.6.5)$$

Empleando (3.4.14), (3.5.10) y (3.6.4) obtenemos que al final de inflación la ecuación dinámica para los modos tiene la forma

$$\ddot{\eta}_k + \left[ \frac{k^2}{\tilde{a}_e^2 e^{2H_e t}} - \frac{9}{4} H_e^2 + V_{eff}''(\varphi_e) \right] \eta_k = 0, \quad (3.6.6)$$

donde

$$\tilde{a}_e = a_e \exp \left( -\frac{\varphi_e^2}{2M_p} \sqrt{\frac{\lambda}{3\xi^2}} t_e \right), \quad (3.6.7)$$

y  $H_e$  es el valor del parámetro de Hubble al final de inflación. La solución de (3.6.6) que satisface la relación de conmutación (3.6.3) es entonces

$$\eta_k = \frac{1}{2\tilde{a}_e} \sqrt{\frac{\pi}{\tilde{a}_e H_e}} \mathcal{H}_\nu^{(1)}[\chi(t)], \quad (3.6.8)$$

donde  $\mathcal{H}_\nu^{(1)}$  es la función de Hankel de primera especie con parámetro  $\nu = \frac{1}{2} \sqrt{9 - \frac{4V_{eff}''(\varphi_e)}{H_e^2}}$  y  $\chi(t) = \left[ \frac{k}{\tilde{a}_e H_e} \right] e^{-H_e t}$ . El espectro de potencias asociado a los modos cuánticos de oscilación (3.6.8) lo obtendremos en la siguiente sección.

### 3.7. El espectro y los observables inflacionarios

Las fluctuaciones medias cuadráticas del campo inflatón asociadas con los modos (3.6.8) son dadas por

$$\langle \delta\varphi^2 \rangle_{IR} = \frac{2^{2\nu} \Gamma^2(\nu)}{8\pi^3 \tilde{a}_e^2} \frac{e^{-(3-2\nu)H_e t_e}}{(\tilde{a}_e H_e)^{1-2\nu}} \int_0^{\epsilon k_H} \frac{dk}{k} k^{3-2\nu}, \quad (3.7.1)$$

donde el parámetro  $\epsilon = k_{max}^{IR}/k_p \ll 1$  es adimensional con  $k_{max}^{IR} = k_H(t_r)$  siendo el número de onda asociado al radio del horizonte cuando los modos reingresan al mismo al finalizar inflación,  $t_r$  es el tiempo del re-ingreso y,  $k_p$  es el número de onda planckiano. Se sigue de esta última expresión que el espectro de potencias tiene la forma

$$\mathcal{P}(k) = \frac{2^{2\nu} \Gamma^2(\nu)}{8\pi^3 \tilde{a}_e^2} \frac{e^{-(3-2\nu)H_e t_e}}{(\tilde{a}_e H_e)^{1-2\nu}} k^{3-2\nu}. \quad (3.7.2)$$

Por otro lado, para determinar los otros parámetros observables que determinan un modelo inflacionario empleamos los parámetros de rodadura lenta

$$\epsilon = \frac{M_p^2}{2} \left( \frac{V'_{eff}}{V_{eff}} \right), \quad \Upsilon = M_p^2 \left( \frac{V''_{eff}}{V_{eff}} \right). \quad (3.7.3)$$

De esta manera el índice espectral  $n$  y el cociente escalar-tensorial  $r$  son dados por

$$1 - n_s = 6 \epsilon - 2\Upsilon, \quad (3.7.4)$$

$$r = 16 \epsilon. \quad (3.7.5)$$

Ambos parámetros son cantidades determinadas por las evidencias observacionales PLANCK 2018. También consideramos el número de desdoblamientos exponenciales mediante la fórmula

$$N(\varphi) = M_p^{-2} \int_{\varphi_e}^{\varphi} \frac{V_{eff}(\varphi)}{V'_{eff}(\varphi)} d\varphi. \quad (3.7.6)$$

Así, el campo inflatón a escala cosmológica puede expresarse en términos de  $N$  quedando

$$\varphi_c(N) = \frac{\sqrt{\beta \Delta^{1/3} (\Delta^{2/3} - 1)}}{\beta \Delta^{1/3}}, \quad (3.7.7)$$

donde

$$\Delta = 12\beta N M_p^2 + \sqrt{1 + 144N^2 \beta^2 M_p^4}. \quad (3.7.8)$$

De esta manera el índice espectral es determinado por la fórmula

$$1 - n_s = \frac{8\beta M_p^2 \Delta (5\Delta^{4/3} - 7\Delta^{2/3} + 5)}{(\Delta^{2/3} - 1)(\Delta^{4/3} - \Delta^{2/3} + 1)^2} \simeq \frac{5}{3N}, \quad (3.7.9)$$

mientras que el cociente escalar-tensorial es dado por

$$r = \frac{128M_p^2 \beta \Delta^{5/3}}{(\Delta^{2/3} - 1)(\Delta^{4/3} - \Delta^{2/3} + 1)^2} \simeq \frac{128}{\beta^{2/3} M_p^{4/3}} \frac{1}{(24N)^{5/3}}. \quad (3.7.10)$$

Se sigue de (3.7.9) que para  $N = 63$  se tiene que  $n_s \simeq 0,9735$ . Las observaciones PLANCK 2018 indican que  $n = 0,968 \pm 0,006$  y por tanto la predicción de nuestro modelo no entra en contradicción con las observaciones para el índice espectral. En el caso del cociente escalar-tensorial  $r$  tenemos que para  $N = 63$  y  $\beta \simeq 0,01629M_p^{-2}$ , se cumple que  $r \simeq 0,01$ , lo cual es consistente con el PLANCK 2018 que indica que  $r < 0,11$ .

# Capítulo 4

## Conclusiones

En esta tesis hemos propuesto un modelo de inflación tipo Higgs en una geometría de Weyl-Integrable. Partimos de una funcional de acción en donde el campo escalar es no-mínimamente acoplado a la gravedad. Este acoplamiento es lo que potencia la energía del campo de Higgs para poder generar la inflación del universo temprano.

Encontramos que el campo de Weyl, que en nuestro caso es geométrico, pues forma parte de la estructura afín de la variedad Lorentziana que conocemos como espacio-tiempo, puede identificarse con el campo de Higgs.

Usando el principio de Palatini encontramos que la geometría de fondo apropiada de la teoría es la de Weyl-Integrable, y en esa geometría la teoría con acoplamiento no-mínimo puede modelarse como una teoría con un término cinético no-canónico en donde la no-canonicidad es determinada por la función de acoplamiento no-mínimo del campo de Weyl.

Cuando escribimos la teoría en términos de una métrica invariante bajo el grupo de simetrías de la teoría, obtenemos un modelo de inflación tipo Higgs en el cual la expansión del universo se super-exponencial en un principio y hacia el final de inflación termina siendo tipo De-Sitter.

---

Las fluctuaciones cuánticas del inflatón, que en este modelo, es físicamente el mismo campo de Higgs, son caracterizadas por un espectro tipo ley de potencias con un índice espectral y un cociente escalar tensorial en concordancia con las evidencias observacionales proporcionadas por el proyecto experimental PLANCK 2018.

Mostramos también que para tener un modelo de Higgs compatible con las evidencias observacionales un acoplamiento que depende de la raíz cuadrada del campo de Weyl es necesario.

Finalmente todos los resultados fueron obtenidos para un número de desdoblamiento exponenciales  $N = 63$ . Además empleamos una norma en la cual no aparece la contribución del potencial electromagnético. El análisis en otras normas lo dejamos como un posible proyecto a futuro pues es importante para determinar la génesis de los campos magnéticos durante inflación a partir de un campo de Higgs.

# Bibliografía

- [1] L. F. Abbott, *Nucl. Phys. B* 185 (1981) 233.
- [2] T. Futamase and K. Maeda, *Phys. Rev. D* 39 (1989) 399.
- [3] L. Amendola, M. Litterio and F. Occhionero, *Int. J. Mod. Phys. A* 5 (1990) 3861.
- [4] V. Faraoni, *Phys. Rev. D* 53. (1996) 6813-6821.
- [5] F. Bezrukov, M. Shaposhnikov, *Phys. Lett. 659* (2008) 703-706.
- [6] R. Jinno, K. Kaneta, K. Oda, *Phys. Rev. D* 97 (2018) 023523.
- [7] V. M. Enckell, K. Enquist, S. Rasanen, E. Tomberg, *JCAP* 06 (2018) 005.
- [8] A. K. Saka, A. Sil, *Phys. Lett. B* 765 (2017) 244-250.
- [9] X. Calmet, I. Kuntz, *Eur. Phys. J. C* 76 (2016) 289.
- [10] Michael E. Peskin, *An introduction to Quantum Field Theory*, CRC-Publications 1995, ISBN-13: 978-0201503975.
- [11] J. Schiller, K. Oda, *Higgs Boson Particle and Impact on Cosmology*, Createspace Independent Publishing 2012, ISBN-10: 1478381647.
- [12] Andrei Linde, *Lecture Notes on General Relativity* December 1997, arXiv:gr-qc/9712019.
- [13] Dilip Kumar Ghosh, *Long lived inert Higgs in fast expanding universe and its imprint on cosmic microwave background*, arXiv:2206.04940v1.

- 
- [14] Shinji Tsujikawa, *Introductory Review of Cosmic Inflation* 28 Apr 2003, arXiv:hep-ph/0304257v1.
- [15] Sean M. Carroll *Lecture Notes on General Relativity* December 1997, arXiv:gr-qc/9712019.
- [16] DMITRY S GORBUNOV, VALERY A RUBAKOV *INTRODUCTION TO THE THEORY OF THE EARLY UNIVERSE Cosmological Perturbations and Inflationary Theory*.
- [17] A. Riotto *In ation and the Theory of Cosmological Perturbations* 30 Jan 2017, arXiv:hep-ph/0210162v2.
- [18] LEWIS H. RYDER, *QUANTUM FIELD THEORY*, second edition, 1996.
- [19] David McMahon. (2008), *Quantum Field Theory Demystified*.
- [20] V. M. Enckell, K. Enqvist, S. Rasanen, E. Tomberg, JCAP 1806 (2018) nÂ°6, 005.
- [21] ATLAS, CMS collaboration, G. Aad et al., Phys. Rev. Lett. 114 (2015) 191803.
- [22] J. R. Espinosa, G. F. Giudice, E. Morgante, A. Riotto, L. Senatore, A. Strumia, et al., JHEP 09 (2015) 174.
- [23] F. L. Bezrukov and M. Shoposhnikov, Phys. Lett. B 659 (2008) 703-706.
- [24] F. Bezrukov, Class. Quant. Grav. 30 (2013) 214001.
- [25] T.S. Almeida, M. L. Pucheu, C. Romero, J. B. Formiga, Phys. Rev D 89 (2014) n°6, 064047.
- [26] M. L. Pucheu, T. S. Almeida, C. Romero, Astrophys. Space Sci. Proc. 38 (2014) n°1, 33-41.
- [27] J. E. Madriz-Aguilar and M. Montes, Phys. Dark. Univ. 21 (2018) 47-54.

- 
- [28] M. Montes, J. E. Madriz Aguilar and V. Granados, Aceptado para su publicación en Canadian Journal of Physics, arXiv:1804.02699/gr-qc (2018).
- [29] Manfredo Perdigao do Carmo, Riemannian Geometry, Birkhauser, 1era edición 1992, ISBN-10: 0817634909.
- [30] JOHN STEWART, *ADVANCED GENERAL RELATIVITY*, First edition, 1993.
- [31] RAY D' INVERNO. (1992), *INTRODUCING EINSTEIN' S RELATIVITY*.
- [32] Sean M. Carroll. (2004), *Spacetime and Geometry An Introduction to General Relativity*.
- [33] ØYVIND GRØN AND SIGBJØRN HERVIK, *Einstein's General Theory of Relativity*, 9th December 2004.
- [34] VALERIO FARAONI, *Cosmology in Scalar Tensor Gravity*, second edition, 1996.
- [35] Jordan, P. (1938), *Naturwiss* 26, 417.
- [36] Jordan, P. (1952), *Schwerkraft und Weltfall, Grundlagen der Theoretische Kosmologie*. Braunschweig: Vieweg und Sohns.
- [37] Fierz, M. (1938), *Helv. Phys. Acta* 29, 128.
- [38] Brans, C.H. and Dicke, R.H.(1961), *Phys. Rev.* 124,925.
- [39] Landau, L.D. and Lifschitz, E.M. (1989), *The Classical Theory of Fields*. Oxford: Pergamon Press.
- [40] Reasenberg, R.D., *et ai.* (1979), *Astrophys. J.(Lett.)* 234, L219.
- [41] Will, C.M. (1993)., *Theory and Experiment in Gravitational Physics* revised edition. Cambridge: Cambridge University Press.

- 
- [42] Will, C.M. (2001), *in Proceedings, SLAC Summer Institute on Particle Physics - Prom the Hubble Length to the Planck Length, Stanford, CA, 1998*, Burke, D., Dixon, L. and Prescott, C., editors, p. 15. Stanford: SLAC.
- [43] Dicke, R.H. (1962), *R.H. , Phys. Rev.* 125, 2163.
- [44] Cho, Y.M. (1992), *Phys. Rev. Lett.* 68, 3133.
- [45] Wagoner, R.V. (1970), *Phys. Rev. D*, 1, 3209.
- [46] Nordtvedt, K. (1970), *Astrophys. J.* 161, 1059.
- [47] Damour, T. and Esposito-Farese, G. (1992), *Class. Quant. Grv.* 9, 2093.
- [48] Berezin, V.A. (1989), *Gen. Rel. Grav.* 21, 1177.
- [49] Rainer, M. and Zuhk, A. (1996), *Phys. Rev. D* 54, 6186.
- [50] Nordtvedt, K. (1970), *Astrophys. J* 161, 1059.
- [51] Hwang, J.-C. (1991), *Class. Quant. Grav.* 8, 1047.
- [52] Burgess, C. P.: “A Goldstone Primer”, <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9812468>.
- [53] Cahill, K.: “Elements of Supersymmetry”, <http://xxx.lanl.gov/abs/hep-ph/9907295>.
- [54] Cottingham, W. N., and D. A. Greenwood: *An Introduction to the Standard Model of Particle Physics*, Cambridge University Press, London (1998).
- [55] Griffi, D.: *Introduction to Elementary Particles*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, N.J. (1987).