



UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA  
CENTRO UNIVERSITARIO DE LOS VALLES  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS  
COORDINACIÓN DEL DOCTORADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Ameca, Jalisco a 5 Diciembre de 2022

**Junta Académica del Programa  
Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas  
del Centro Universitario de los Valles**

**Presente:**

En mi carácter de director del trabajo recepcional titulado: **“Equivalencia de Materia Inducida y Teoría de Branhas con Gravitación en Geometrías No-Riemannianas con Torsión Nula.”**, que presenta la **Mtra. Cynthia Guadalupe De Loza Aguilar** con código 213282536, expongo que lo he revisado y que a mi juicio cumple con los requisitos metodológicos y de contenido, para que pueda ser sometida al examen recepcional correspondiente al Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas con Orientación en Matemáticas.

Por lo antes expuesto, me permito emitir el presente oficio de liberación del trabajo recepcional, con la finalidad de que pueda llevarse a cabo la defensa del mismo.

**Atentamente:**

**“Piensa y Trabaja”**

*“2022, Guadalajara, hogar de la Feria Internacional del Libro y Capital Mundial del Libro”*

Ameca, Jalisco a 5 de Diciembre de 2022

---

Dr. José Edgar Madriz Aguilar  
Profesor investigador  
UdeG



**UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA**  
**CENTRO UNIVERSITARIO DE LOS VALLES**  
**COORDINACIÓN DEL DOCTORADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

CUV/DCFM/006/2023

**Mtro. Abraham Vega Tapia.**  
**Coordinador Control Escolar**  
**CUVALLES**  
**PRESENTE**

**At'n Raúl Antonio Verdín Arreola**  
**Jefe de Unidad de Atención y Egreso**

Por este medio se hace de su conocimiento que el trabajo de tesis titulado **“Equivalencia de Materia Inducida y Teoría de Branas con Gravitación en Geometrías No-Riemannianas con Torsión Nula”**, presentado por la alumna **Mtra. Cynthia Guadalupe De Loza Aguilar** con código **213282536**, para obtener el grado académico de Doctora en Ciencias Físico Matemáticas con orientación en Matemáticas **SÍ CUMPLE** con los requerimientos establecidos en el Reglamento General de Posgrado, para su presentación del examen de grado, según consta en el acta **DCFM/001/2023** de sesión de la Junta Académica, celebrada el 11 de enero de 2023.  
 Por tal motivo, le informamos que el examen de grado se efectuará el día **viernes 27 de enero de 2023** a las **10:00 hrs** en la **Sala Audiovisual del Departamento de Matemáticas del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingeniería, CUCEI**. Al respecto le solicitamos atentamente la elaboración del acta correspondiente. Asimismo, le comunico sobre la designación del jurado de examen de grado.

- Dr. Fermín Acéves de la Cruz (Presidente)
- Dr. Juan Antonio Licea Salazar (Secretario)
- Dr. Alonso Castillo Ramírez (Vocal)
- Dra. Mariana Sarahí Montes Navarro (Vocal)
- Dr. José Edgar Madriz Aguilar (**Director**) (Vocal)

Le agradezco su atención y me pongo a sus órdenes para cualquier información adicional.

Atentamente:  
 "Piensa y trabaja"

"2023, Año del fomento a la formación integral con una Red de Centros y Sistemas Multidisciplinarios"  
 Ameca, Jalisco a 11 de enero de 2023

**Dr. Marciano Sanchez Tizapa**  
 Coordinador del Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas



**UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA**  
**C. UNIVERSITARIO DE LOS VALLES**  
**COORDINACIÓN DE DOCTORADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



**C. UNIVERSITARIO DE LOS VALLES**  
**RECIBI**  
**12 ENE. 2023**

**COORDINACIÓN DE CONTROL ESCOLAR**

**Vo.Bo. Dra. Suhey Ayala Ramirez**  
 Coordinadora de Posgrado

c.c.p Expediente

11:23am



**UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA**  
CENTRO UNIVERSITARIO DE LOS VALLES  
COORDINACIÓN DEL DOCTORADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

CUV/ DCFM/01/2023  
ASUNTO: Carta de revisión anti-plagio  
de trabajos recepcionales.

**H. Miembros de la Junta Académica del  
Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas**  
Presente

Por este medio, me permito hacer de su conocimiento que el trabajo recepcional titulado **“Equivalencia de materia inducida y teoría de Branos con gravitación en geometrías no-Rienmanianas con torsión nula”**, realizado por la alumna **Mtra. Cynthia Guadalupe De Loza Aguilar** con código **213282536** del Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas con orientación en Matemáticas, fue revisado de manera previa a su presentación y defensa ante el jurado correspondiente, a través de la herramienta anti-plagio denominada Turnitin.

Con base en la revisión realizada por el director del trabajo recepcional y el análisis del reporte de las similitudes encontradas por dicho software, no se identificaron elementos originales contenidos en alguna obra de terceros que se hagan pasar como propios por el autor del trabajo recepcional <sup>1</sup>.

Por ello, se considera que el trabajo recepcional presentado es resultado del esfuerzo individual de su autor y que este empleó las normas y protocolos de citación pertinentes en su desarrollo, por lo cual, se presume que no infringe derechos intelectuales de terceros.

Sin otro particular por el momento, me despido con un cordial saludo.

Atentamente:  
“Piensa y Trabaja”

“2023, Año del fomento a la formación integral con una Red de Centros y Sistemas  
Multitemáticos”

Ameca, Jalisco a 6 de enero de 2023

**Dr. Marciano Sanchez Tizapa**

Coordinador del Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas



**UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA**  
**C. UNIVERSITARIO**  
**DE LOS VALLES**  
Coordinación de Doctorado  
en Ciencias Físico Matemáticas

<sup>1</sup> Si bien el plagio como vulneración a los derechos intelectuales no se encuentra previsto en la legislación penal o en materia de propiedad intelectual, para efectos de su comprensión se recurre a la opinión doctrinista argentina Delia Lipszyc, quién señala se refiere al plagio como “el apoderamiento ideal de todos o de algunos elementos originales contenidos en la obra de otro autor presentándolo como propios”. (Ref, Lipszyc Delia, cit. pos. Timal López Sandra y Sánchez Espinoza, Francisco. El plagio en el contexto del derecho de autor. Revista “Tla-melaua” de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (online), 2017, vol. 11, n 42, pp 48-66. Disponible en :[http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_abstract&pid=S1870-69162017000200048&Ing=es&nrm=iso](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S1870-69162017000200048&Ing=es&nrm=iso)

2022-B

Código 213282536

**UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA**  
**CENTRO UNIVERSITARIO DE LOS VALLES**  
**Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas con Orientación en**



**EQUIVALENCIA DE MATERIA INDUCIDA Y TEORÍA DE BRANAS  
CON GRAVITACIÓN EN GEOMETRÍAS NO-RIEMANNIANAS CON  
TORSIÓN NULA.**

TESIS PROFESIONAL PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
DOCTORADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS CON ORIENTACIÓN EN  
MATEMÁTICAS

**Autor:** Cynthia Guadalupe De Loza Aguilar

**Director :** Dr. José Edgar Madriz Aguilar.  
**Co-Director:** Dra. Mariana Sarahí Montes Navarro.

Ameca, Jalisco, enero del 2023

## **AGRADECIMIENTOS**

Primeramente quiero agradecer a Dios por todo lo que soy y por permitirme tomar las mejores decisiones de mi vida.

Quiero agradecer a mi director de tesis el Doctor José Edgar Madriz Aguilar por acompañarme desde mis inicios como matemática, por sus enseñanzas, por su paciencia, sabiduría y amabilidad al explicarme y aclarando cada una de mis dudas. De igual manera quiero agradecer a mi co-director de tesis la Doctora Mariana Sarahí Montes Navarro por su tiempo, dedicación y enseñanza. Es un placer trabajar con excelentes investigadores y personas.

También agradezco a mi esposo Angel Antonio Perez Valencia por acompañarme desde el comienzo de mi carrera, por ser mi apoyo incondicional y por respetar cada una de mis decisiones. De igual manera agradezco a mis dos hermosos hijos Angel Christoffel y Danna Valentina por ser mi motor de vida, por alegrarme cada uno de mis días y por acompañarme en esta gran experiencia.

Quiero agradecer a la Universidad De Guadalajara y a todos los profesores y académicos que dejaron huella en mi carrera. Por último quiero agradecer a CONACyT por tantos años de apoyo como estudiante.

# ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS . . . . .	1
INTRODUCCIÓN . . . . .	4
OBJETIVOS . . . . .	6
<b>I. Geometría de Weyl-Integrable</b>	<b>7</b>
1.1. Geometría de Weyl . . . . .	7
1.2. Geometría de Weyl-Integrable . . . . .	9
1.3. Extensión del Teorema de Levi-Civita . . . . .	10
1.4. Funcional de Acción de Einstein-Hilbert en una geometría de Weyl-integrable . . .	12
1.5. Ecuaciones de Campo de Relatividad General en una geometría de Weyl-integrable	13
<b>II. Materia inducida</b>	<b>16</b>
2.1. Teoría de la materia inducida . . . . .	16
2.2. Extensión Lorentziana del Teorema de Campbell-Magaard . . . . .	17
2.3. Ecuaciones de Campo . . . . .	20
2.4. Una solución cosmológica 5D . . . . .	26
<b>III. Teoría de Mundo-Branas</b>	<b>28</b>
3.1. Problema de Jerarquía . . . . .	28
3.2. Curvatura extrínseca . . . . .	30
3.3. Condición de Unión de Israel . . . . .	32
3.4. Ecuaciones de campo en Branas . . . . .	36
<b>IV. Equivalencia entre las diferentes teorías</b>	<b>39</b>
4.1. Equivalencia gravitación con geometría de Weyl-Integrable y Materia Inducida . .	39
4.2. Una equivalencia cosmológica . . . . .	40
4.3. Equivalencia empleando la métrica de Minkowski 5D . . . . .	44
4.4. Equivalencia entre teoría de Materia Inducida y Teoría de Branas . . . . .	46

CONCLUSIONES . . . . .	50
BIBLIOGRAFÍA . . . . .	52

## INTRODUCCIÓN

Como se menciona en [2, 3, 1], dentro de las teorías de gravitación en dimensiones extra, dos de las más importantes son la teoría de materia inducida y la llamada teoría de mundos Brana. En ambas teorías se asume que la gravedad, a diferencia de las otras tres interacciones fundamentales, escapa de nuestro universo 4D (4-dimensional) a un universo 5D (5-dimensional), mientras que la materia aparece en hipersuperficies 4D del espacio-tiempo 5D. La geometría en la variedad 5D se asume Riemanniana. Ambas teorías a pesar de sus diferencias, ha sido mostrado por Jaime Ponce de Leon que son equivalentes.

En la teoría de materia inducida se supone que el universo en 5D esta en un estado de vacío clásico, por lo cual el escalar de Ricci 5D satisface:  ${}^{(5)}R_{ab} = 0$ . La idea es que nuestro universo es representado por una hipersuperficie 4D que se elige tomando la quinta coordenada constante. Tal hipersuperficie tiene curvatura extrínseca no nula al estar embebida local e isométricamente en el espacio-tiempo 5D. Esta curvatura extrínseca se interpreta por una clase de observadores 4D montados en la hipersuperficie 4D como curvatura de Ricci de la misma. Dado que en relatividad general la gravedad se manifiesta como la curvatura de Ricci del espacio-tiempo 4D, y la fuente del campo gravitacional es la materia, entonces se concluye que la curvatura extrínseca en la hipersuperficie 4D debe corresponder a determinados tipos de materia. A esa materia, cuyo origen es geométrico, se le conoce como materia inducida y de ahí el nombre de la teoría [1, 2, 3]. Matemáticamente, la teoría de materia inducida tiene su fundamento matemático en el teorema de Campbell-Magaard y sus variedades Lorentzianas. Este teorema afirma que cualquier variedad Riemanniana analítica  $n$ -dimensional puede ser local e isométricamente en una variedad analítica Riemanniana  $n + 1$ -dimensional. Esto implica que las ecuaciones de Einstein con fuentes  $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}$  pueden ser localmente embebidas en  ${}^{(5)}R_{ab} = 0$ . Por tanto todas las soluciones de las ecuaciones de Einstein de la relatividad general pueden obtenerse desde las ecuaciones de campo de la teoría de materia inducida, y más aún pueden obtenerse nuevas soluciones que no pueden obtenerse en el contexto de la relatividad general [1]. En términos simples la teoría de materia inducida explica nuestro universo 4D a partir de un universo 5D en vacío.

Por otro lado, la teoría de mundos branas en lugar de un vacío en 5D considera que puede haber materia en 5D y que por diferentes mecanismos esta materia termina confinada a una hipersuperficie 4D, llamada brana, que representa nuestro universo 4D. Mientras que en la teoría de materia inducida la quinta dimensión se considera no-compacta, es decir, extendida, en la teoría de branas se piensa como compacta con la topología de  $S^1$  con un radio igual a la longitud de Planck ( $l_p \sim 10^{-33} cm$ ). Estos modelos fueron introducidos por primera vez por L. Randall y R. Sundrum en un intento por resolver el problema de jerarquía [4]. Este último consiste en explicar porque la diferencia entre la intensidad del acoplamiento gravitacional con el resto de las otras interacciones es mayor que la diferencia entre las otras interacciones.

Tanto en la teoría de materia inducida como en la teoría de branas lo que se obtiene es que el tensor de Einstein es modificado por contribuciones de la curvatura extrínseca. De ahí aparece en la teoría de materia inducida el tensor de materia inducida, y en la teoría de branas modificaciones al tensor de energía-momento de materia generadas por la curvatura extrínseca. Sin embargo, si en lugar de considerarse una teoría de gravedad en 5D, se considera que nuestro espacio-tiempo es una variedad lorentziana 4D con geometría no-Riemanniana, también el tensor de Einstein sufre una modificación debido a la no-metricidad asociada a la geometría de fondo. De esta forma aparece un efecto similar en las ecuaciones de campo de Einstein calculadas con la conexión de Levi-Civita, cuando éstas se derivan de un escenario en dimensiones extra que en un escenario en una geometría no-Riemanniana.

En este proyecto de investigación doctoral buscamos demostrar que existe una equivalencia de modelos 5-dimensionales de materia inducida y branas cuya geometría de fondo es Riemanniana con teorías de gravitación 4-dimensionales cuya geometría de fondo es no-Riemanniana sin torsión y en particular con no-metricidad tipo Weyliana. En otras palabras consideraremos una geometría de Weyl-Integrable en el espacio 4D para mostrar la equivalencia mencionada. Es importante tener en cuenta que actualmente teorías de gravedad de dimensiones extra y en geometrías no-Riemannianas se consideran escenarios geoméricamente distintos, y de ahí la importancia del objetivo principal de este proyecto.

## OBJETIVOS

- Establecer una relación de equivalencia entre las ecuaciones de campo 4D inducidas a partir de una teoría de materia inducida 5D y las ecuaciones de campo de una teoría de relatividad general formulada en una geometría de Weyl-Integrable.
- Obtener una relación de equivalencia de campo 4D obtenidas en el campo teórico de la teoría de Branas 5D y las ecuaciones de campo de una teoría de la relatividad general formulada en una geometría de Weyl-Integrable.
- Mostrar que existen relaciones de equivalencia entre los diferentes escenarios 4D derivados de la teoría de materia inducida, la teoría a de Branas y la teoría a de la relatividad general en una geometría de Weyl-Integrable, que indican que todos estos escenarios 4D pertenecen a una misma clase de equivalencia.

# Capítulo I

## Geometría de Weyl-Integrable

En este capítulo estudiaremos los principios básicos de un tipo de geometría no-Riemanniana: la geometría de Weyl-Integrable. Abordaremos el problema del segundo reloj que se desprende de la geometría de Weyl y de cómo su solución dio origen a la geometría de Weyl-Integrable. Estudiaremos la estructura afín en esta geometría así como su grupo de simetría asociado.

### 1.1. Geometría de Weyl

Esta teoría fue desarrollada por Hermann Klaus Hugo Weyl en su intento de formular una teoría que unificara el electromagnetismo con la gravitación, donde éste supuso que la geometría era no-Riemanniana [5]. Lo novedoso de esa geometría radica en la introducción de un campo de 1-forma  $\sigma$ , de tal manera que se modifica la condición de compatibilidad entre la métrica  $g$  y la conexión afín  $\nabla$  en la forma

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = \sigma_{\alpha} g_{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

Podemos notar que en la ecuación (1.1) la derivada covariante del tensor métrico es distinta de cero a diferencia de lo que sucede en la geometría Riemanniana. A a esta ecuación se le conoce como condición de no-metricidad. Puede verse fácilmente que para  $\sigma_{\alpha} = 0$  se recupera la condición de metricidad de la geometría de Riemann. Puede decirse entonces que la geometría de Weyl es una generalización de la geometría Riemanniana. De la condición (1.1) se desprende un nuevo grupo

de transformaciones dado por

$$\begin{cases} \bar{g}_{\mu\nu} = e^f g_{\mu\nu}, \\ \bar{\sigma}_\alpha = \sigma_\alpha + f_{,\alpha}, \end{cases} \quad (1.2)$$

donde  $f(x^\alpha)$  es una función diferenciable en la variedad  $M$ , el cual deja invariante la condición de compatibilidad (1.1). Este grupo de transformaciones es conocido como el grupo de Weyl.

Sin embargo, esta geometría no tuvo mucho éxito ya que sufre del problema del segundo reloj. Este problema consiste en que si tenemos dos relojes atómicos que se encuentran en un mismo punto  $A$  y estos se mueven por curvas diferentes y llegan a un mismo punto  $B$  entonces estos marcarán segundos de diferente magnitud en ese último punto. Para entender este problema de manera más clara y formal escribiremos la condición de no-metricidad de Weyl en su forma independiente de coordenadas.

**Definición 1** *Sea  $M$  una variedad diferenciable,  $g$  una métrica y  $\nabla$  una conexión afín, sea  $C$  una curva diferenciable dada por*

$$C : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow M \quad (1.3)$$

$$\lambda \rightarrow C(\lambda) . \quad (1.4)$$

Sean además  $\bar{U}, \bar{V} \in T(M)$  dos campos vectoriales definidos a lo largo de la curva  $C(\lambda)$ . Así, la condición de compatibilidad de Weyl en su forma independiente de coordenadas es dada por

$$\frac{D}{d\lambda} g(\bar{V}, \bar{U}) = \sigma \left( \frac{d}{d\lambda} \right) g(\bar{V}, \bar{U}), \quad (1.5)$$

donde  $d/d\lambda \in T(M)$ .

Supongamos que la condición de no-metricidad (1.3) se cumple a lo largo de la curva  $C$  partiendo desde un punto inicial  $\lambda_0$  y hasta un punto final  $\lambda$ , por tanto se sigue de (1.5) que

$$g(\bar{V}(\lambda), \bar{U}(\lambda)) = g(\bar{V}(\lambda_0), \bar{U}(\lambda_0)) e^{\int_{\lambda_0}^{\lambda} \sigma \left( \frac{d}{d\lambda} \right) d\lambda}. \quad (1.6)$$

Esta ecuación nos indica que el producto escalar de los vectores  $\bar{U}$  y  $\bar{V}$  cambia a lo largo de la curva  $C(\lambda)$ . (Figura 1.1).

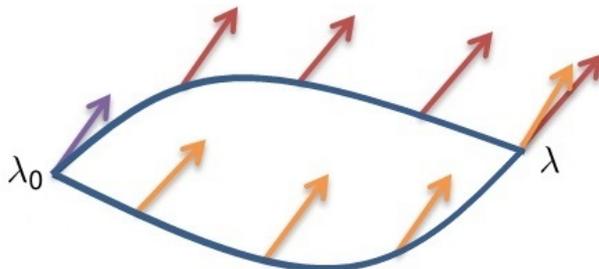


Figura 1.1: Transporte paralelo de dos vectores para una geometría de weyl

Por otro lado, la longitud de un vector  $\bar{V}$  transportado paralelamente a lo largo de la curva es definida como

$$L(\lambda) = g(\bar{V}(\lambda), \bar{V}(\lambda))^{1/2} = \|\bar{V}(\lambda)\|. \quad (1.7)$$

Se sigue entonces de (1.6) y (1.7) que

$$\frac{dL(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\sigma_\alpha}{2} \left( \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right) L(\lambda). \quad (1.8)$$

Esta última expresión nos indica que no solamente cambia el producto escalar bajo transporte paralelo sino además la longitud de los vectores también lo hace. De ahí que si se considera un vector tipo tiempo, es decir, uno cuya longitud determina un intervalo de tiempo, en el punto inicial  $\lambda_0$ , al llegar al punto  $\lambda$  ese cambio en su longitud indica que la unidad de tiempo cambia. Más aún, la unidad de tiempo dependerá de la trayectoria para llegar del punto inicial al final. En ese sentido, como habíamos mencionado, dos relojes (vectores tipo tiempo) que partan de un mismo punto y lleguen a otro punto en común pero por trayectorias diferentes, marcarán segundo de tamaño distinto. De ahí el nombre de problema del segundo reloj. La solución a este problema dio origen al surgimiento de la conocida como geometría de Weyl-Integrable, la que abordaremos a continuación.

## 1.2. Geometría de Weyl-Integrable

Para evitar el problema del segundo reloj, Weyl sugirió eliminar el término que hacía que la longitud de los vectores cambiara cuando eran transportados a lo largo de curvas cerradas. Así, utilizando el teorema de Stokes, es fácil de ver que si  $\sigma$  es una 1-forma exacta, existe una función

escalar  $\psi$  tal que  $\sigma = d\psi$ , entonces se cumple que

$$\oint \sigma \left( \frac{d}{d\lambda} \right) d\lambda = 0. \quad (1.9)$$

De esta manera Weyl propuso que  $\sigma$  fuera solo de aquella clase de 1-formas que se expresan como el gradiente de un campo escalar. Bajo esta consideración se sigue de (1.9) que ahora

$$g(\bar{V}(\lambda), \bar{U}(\lambda)) = g(\bar{V}(\lambda_0), \bar{U}(\lambda_0)). \quad (1.10)$$

Esta ecuación implica que el producto escalar se conserva para curvas cerradas y de esta manera el problema del segundo reloj no aparece. La geometría asociada a 1-formas exactas se conoce como geometría de Weyl-Integrable, y la condición de compatibilidad (1.1) bajo estas condiciones se escribe como

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = \varphi_{,\alpha} g_{\mu\nu}. \quad (1.11)$$

Análogamente las transformaciones (1.2) se reescriben de la siguiente manera

$$\begin{cases} \bar{g}_{\mu\nu} = e^f g_{\mu\nu}, \\ \bar{\varphi}_{,\lambda} = \varphi_{,\lambda} + f_{,\lambda}. \end{cases} \quad (1.12)$$

Las ecuaciones (1.12) definen el grupo de simetrías geométricas asociadas a la geometría de Weyl-Integrable. Finalmente, no es difícil ver que dada la forma de (1.1) y (1.12) la conexión afín en este tipo de geometrías ya no debe ser solamente la conexión de Levi-Civita, de ahí que en la próxima sección estudiaremos la extensión del teorema de Levi-Civita para las geometrías de Weyl y Weyl-Integrable.

### 1.3. Extensión del Teorema de Levi-Civita

Las propiedades de transporte paralelo, diferenciabilidad covariante y estructura geodésica en estas geometrías es dada por la estructura afín asociada a cada condición de compatibilidad. Así, para determinar los símbolos de conexión afín en las geometrías de Weyl y Weyl-Integrable es necesario anunciar el siguiente teorema

**Teorema I.1** *Sea  $M^n$  una variedad diferenciable, existe una única conexión afín que satisface las*

siguientes condiciones:

1.  $\nabla$  simétrica.
2.  $\nabla$  es Weyl compatible con la métrica  $g$ .

**Demostración** En 2. tenemos que se asume que la conexión de Weyl es una conexión compatible con la métrica, entonces de la ecuación (1.1) se tiene que

$$\nabla_\nu g_{\beta\mu} = \sigma_\nu g_{\beta\mu}. \quad (1.13)$$

De manera mas explicita

$$g_{\beta\mu,\nu} - g_{\alpha\mu}\Gamma_{\beta\nu}^\alpha - g_{\beta\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \sigma_\nu g_{\beta\mu}. \quad (1.14)$$

Permutando cíclicamente los índices llegamos a

$$g_{\beta\nu,\mu} - g_{\alpha\nu}\Gamma_{\beta\mu}^\alpha - g_{\beta\alpha}\Gamma_{\nu\mu}^\alpha = \sigma_\mu g_{\beta\nu}, \quad (1.15)$$

$$g_{\mu\nu,\beta} - g_{\alpha\nu}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha - g_{\mu\alpha}\Gamma_{\nu\beta}^\alpha = \sigma_\beta g_{\mu\nu}. \quad (1.16)$$

Sumando (1.14) con (1.15) y restando (1.16) se obtiene

$$g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta} - 2g_{\beta\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \sigma_\nu g_{\beta\mu} + \sigma_\mu g_{\beta\nu} - \sigma_\beta g_{\mu\nu}. \quad (1.17)$$

Resolviendo para las componentes de conexión resulta

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \{\alpha_{\mu\nu}\} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}[\sigma_\nu g_{\beta\mu} + \sigma_\mu g_{\beta\nu} - \sigma_\beta g_{\mu\nu}], \quad (1.18)$$

donde  $\{\alpha_{\mu\nu}\} = -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}[g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}]$  denotan los símbolos de conexión de Levi-Civita también conocidos como símbolos de Christoffel. Dado que (1.18) determina la conexión en función unicamente de la métrica, entonces la unicidad de la métrica nos lleva al resultado deseado.  $\square$

Los símbolos de conexión para una geometría de Weyl están dados por la ecuación (1.18) y reemplazando  $\sigma_\alpha$  por  $\varphi_{,\alpha}$  obtenemos

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \{\alpha_{\mu\nu}\} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}[\varphi_{,\nu}g_{\beta\mu} + \varphi_{,\mu}g_{\beta\nu} - \varphi_{,\beta}g_{\mu\nu}], \quad (1.19)$$

que son los símbolos de conexión afín correspondientes a una geometría de Weyl-Integrable.

Una vez especificados los símbolos de conexión afín es posible calcular las curvaturas de Riemann y de Ricci en una geometría de Weyl-Integrable. Esto resulta de importancia en la formulación de teorías de gravitación. Más aún, se hace relevante la interrogante de si es posible construir una extensión de la teoría de la relatividad general para el caso de una geometría de fondo de Weyl-integrable. En la siguiente sección comenzaremos esa discusión comenzando con la extensión de la acción de Einstein-Hilbert de relatividad general.

## 1.4. Funcional de Acción de Einstein-Hilbert en una geometría de Weyl-integrable

De acuerdo al matemático Hilbert, las ecuaciones de campo de la teoría de la relatividad general pueden obtenerse mediante el principio variacional de mínima acción partiendo de la funcional de acción conocida como de Einstein-Hilbert. La característica más importante de esta acción es que debe ser un escalar bajo el grupo de difeomorfismos. Este grupo es el grupo de simetría asociado a la geometría de Riemann. Sin embargo, si ahora tenemos una geometría de fondo del tipo Weyl-Integrable el grupo de simetría ya no es el de difeomorfismos sino que adicionalmente debemos considerar el de Weyl. Esto conlleva a que una cantidad escalar bajo el grupo de difeomorfismos no lo es bajo el grupo de Weyl, y por tanto la acción de Einstein-Hilbert original no es un escalar (o invariante) bajo el grupo de Weyl. De ahí que para formular relatividad general en una geometría de Weyl-Integrable el primer paso sería construir una acción que sea invariante bajo el grupo de transformaciones de Weyl asociado a una geometría de Weyl-Integrable. Así, se propone la acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} e^\varphi (R + k e^\varphi L) \quad (1.20)$$

donde,  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  denota el escalar de curvatura de Ricci,  $g$  es el determinante de la métrica,  $k$  es una constante de acoplamiento y  $L$  es una densidad lagrangiana de materia.

Nuestro primer objetivo es buscar la invarianza de la acción (1.20) con respecto a las transformaciones dadas en la ecuación (1.12). No es difícil probar que la conexión afín resulta ser invariante bajo (1.12), es decir

$${}^{(W)}\bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} = {}^{(W)}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}. \quad (1.21)$$

Es importante aclarar que de ahora en adelante  ${}^{(W)}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$  se empleará para denotar los símbolos de conexión afín en una geometría de Weyl-Integrable, mientras que símbolos de conexión en

una geometría Riemanniana se denotarán simplemente por  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ . Se sigue de la invariancia de la conexión afín que

$${}^{(W)}\bar{R}_{\alpha\beta} = {}^{(W)}R_{\alpha\beta}. \quad (1.22)$$

Esto significa que la curvatura de Ricci es también invariante bajo el grupo de Weyl. Sin embargo, el determinante de la métrica no lo es y transforma de acuerdo a:  $\bar{g} = e^{4f}g$ . Así cuando transformamos la acción (1.20) obtenemos

$$\bar{S} = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} e^{\bar{\varphi}} \{ \bar{R} + k e^{\bar{\varphi}} L_m \} = \int d^4x e^{2f} \sqrt{-g} e^{\varphi-f} \{ e^{-f} R + k e^{\varphi-f} L_m \} = S. \quad (1.23)$$

Esto muestra que efectivamente la acción (1.20) resulta ser invariante bajo el grupo de Weyl y por tanto es un escalar bajo el mismo que puede considerarse como la extensión de la acción de Einstein-Hilbert para una geometría de fondo de Weyl-Integrable. El siguiente paso es entonces obtener las ecuaciones de campo derivadas de la acción (1.20), lo que será nuestro objetivo en la siguiente sección.

## 1.5. Ecuaciones de Campo de Relatividad General en una geometría de Weyl-integrable

Para encontrar las ecuaciones de campo correspondientes a la acción dada en la ecuación (1.20), de acuerdo al principio de mínima acción basta con calcular

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \quad (1.24)$$

Sin embargo, debemos tener presente que nuestro objetivo en esta tesis es encontrar una equivalencia entre la relatividad general formulada en una geometría de Weyl-Integrable y algunas teorías en dimensiones extra, las cuales fueron formulas en una geometría Riemanniana. De esta forma, para poder comparar estas teorías, debemos situarlas en una misma geometría. Para ello comenzaremos reescribiendo la acción (1.20) en una geometría Riemanniana. Así, es posible escribir el escalar de curvatura de Ricci como la suma de una contribución Riemanniana y una parte adicional mediante el uso de la fórmula

$${}^{(W)}R = {}^{(W)}R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = ({}^{(W)}\Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - {}^{(W)}\Gamma_{\alpha\mu,\nu}^\alpha + {}^{(W)}\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha {}^{(W)}\Gamma_{\mu\nu}^\beta - {}^{(W)}\Gamma_{\nu\beta}^\alpha {}^{(W)}\Gamma_{\alpha\mu}^\beta) g^{\mu\nu}, \quad (1.25)$$

donde los símbolos de conexión afín en una geometría de Weyl-Integrable son dados por (1.19). Así, el escalar de curvatura de una geometría de Weyl en términos del tensor de curvatura en geometría riemanniana, es dado por

$${}^{(W)}R = R + 3\Box\varphi + \frac{3}{2}g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} \quad (1.26)$$

donde  $R$  es el escalar de curvatura en una geometría Riemanniana y  $\Box$  es el operador D'Lambertiano. Ahora sustituyendo esta última ecuación en la acción (1.20) y utilizando el Teorema de Gauss para términos de divergencia, se obtiene

$$S_R = \int d^4x \sqrt{-g} e^\varphi \left\{ R + \frac{3}{2}g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} + k e^\varphi L_m \right\}. \quad (1.27)$$

Sustituyendo (1.27) en (1.24) obtenemos

$$\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left\{ \int d^4x \sqrt{-g} e^\varphi \left\{ R + \frac{3}{2}g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} + k e^\varphi L_m \right\} \right\} = 0. \quad (1.28)$$

Se sigue entonces de (1.28) que

$$\left\{ e^\varphi \delta(\sqrt{-g}) R + e^\varphi \sqrt{-g} \delta R + \frac{3}{2} e^\varphi [\delta(\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} \delta(g^{\mu\nu})] \varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} + k e^{2\varphi} \delta(\sqrt{-g}) L_m \right\} = 0. \quad (1.29)$$

Empleando las relaciones

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (1.30)$$

$$e^\varphi \delta R = e^\varphi R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + e^\varphi [-\varphi_{,\mu,\nu} - \varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} + \Box\varphi g_{\mu\nu} + \varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha} g_{\mu\nu}] \delta g^{\mu\nu}, \quad (1.31)$$

en la ecuación (1.29), llegamos a

$$G_{\mu\nu} - \varphi_{,\mu,\nu} + g_{\mu\nu}\Box\varphi - \frac{1}{2} \left[ \varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha} \right] = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}e^\varphi k L_m. \quad (1.32)$$

Estas son las ecuaciones de Campo para una teoría de la relatividad general en una geometría de Weyl-integrable.

Para llegar a nuestro objetivo principal, estudiaremos ahora los fundamentos básicos de las teorías de materia inducida y branas, lo que nos permitirá establecer la equivalencia a nivel de ecuaciones de campo con la teoría de la relatividad general formulada en una geometría de Weyl-Integrable. Esto lo haremos en los siguientes capítulos comenzando con la teoría de materia inducida.

# Capítulo II

## Materia inducida

En este capítulo estudiaremos una de las teorías en dimensiones extra de gravitación que permite en cierto sentido tener una geometrización de la materia y es conocida como teoría de materia inducida. En las siguientes secciones estudiaremos algunos teoremas y definiciones de embebidos vinculados con el teorema de Campbell-Magaard, que es el pilar sobre el que descansa la teoría de materia inducida. Abordaremos también las ecuaciones de campo 5-dimensionales (5D) y obtendremos las ecuaciones de campo 4- dimensionales (4D) inducidas sobre nuestro espacio-tiempo 4D. Finalmente mostraremos una solución conocida de las ecuaciones de campo 5D.

### 2.1. Teoría de la materia inducida

La teoría de la materia inducida fue desarrollada por Paul-Wesson donde parte de la idea de que nuestro universo es 5D y se encuentra en un estado de vacío clásico, donde se entiende por espacio-tiempo una variedad  $M$  Riemanniana y 5D. En la actualidad hablar de una teoría 5-dimensional representa una situación única en la física teórica [7]. Se sabe que esta teoría es una extensión de la teoría 4D de la relatividad general de Einstein en donde la materia tiene un origen geométrico.

En la teoría de la materia inducida se consideran 3-dimensiones espaciales  $x, y, z$ , una dimensión temporal  $t$  y una dimensión extra tipo espacio  $\psi$ . Uno de los éxitos más importantes de esta teoría es que las ecuaciones de Einstein de relatividad general pueden obtenerse como una reducción dimensional de las ecuaciones de campo 5D, obtenidas por P. Wesson y J. Ponce de León [13]. Este procedimiento fue garantizado por un teorema poco conocido sobre embebidos locales de variedades Riemannianas, a saber, el teorema de Campbell-Magaard. Este teorema establece que toda variedad riemanniana 4D puede ser local e isométricamente embebida en una variedad riemanniana

5D Ricci plana, es decir, con curvatura de Ricci nula. Sin embargo, como veremos, requerimos la extensión de este teorema para el caso de variedades Lorentzianas, tema que abordaremos en la siguiente sección.

## 2.2. Extensión Lorentziana del Teorema de Campbell-Magaard

El teorema de Campbell-Magaard para embebidos locales e isométricos en un espacio Ricci-plano se refiere a las  $M$ -variedades Riemannianas, es decir las que están dotadas de métricas positivas definidas, sin embargo, en esta tesis nos enfocaremos en espacios Lorentzianos Ricci planos  $5D$ , de ahí que emplearemos una extensión de este teorema que incluya variedades Lorentzianas. Recordemos que una variedad es Lorentziana si esta equipada con una métrica semi-Riemanniana cuya signatura (por ejemplo en  $5D$ ) es  $(+, -, -, -, -)$  o  $(-, +, +, +, +)$ . Tal extensión fue propuesta en [2] y para abordarla comenzaremos con algunas definiciones importantes.

**Definición 2** *Se dice que una  $M^n$  variedad es semi-Riemanniana si esta dotada con una métrica semi-Riemanniana, es decir, un campo tensorial simétrico y no-degenerado de segundo orden y de signatura arbitraria.*

**Definición 3** *Sea  $\phi : U \subset M^n \rightarrow M^{n+k}$ , donde  $M^n$  y  $M^{n+k}$  son variedades diferenciales con  $n$  y  $n+k$  dimensiones respectivamente, donde  $k \geq 0$ . Entonces  $\phi$  es una embebido local isométrico si se cumple lo siguiente:*

- Si  $d\phi_p : T_p M^n \rightarrow T_{\phi(p)} M^{n+k}$  es inyectiva para todo punto  $p \in U$ .
- Sean  $u, v \in T_p M^n$  se cumple que  $g_p(u, v) = \tilde{g}_{\phi(p)}(d\phi(u), d\phi(v))$ , donde  $g$  y  $\tilde{g}$  denotan las métricas para las variedades  $M^n$  y  $M^{n+k}$  respectivamente.
- $\phi$  es un homeomorfismo.

**Definición 4** *Considere un espacio semi-Riemanniano  $(\tilde{M}^{n+1}, \tilde{g})$ ,  $(n+1)$ -dimensional y sea  $\tilde{R}_{\alpha\beta}$  los componentes del tensor de Ricci en un sistema de coordenadas  $y = \{y^1, \dots, y^{n+1}\}$ . Sea  $(\bar{M}^{n+1}, \bar{g})$  otro espacio semi-Riemanniano con componentes  $\bar{R}_{\alpha\beta}$  en un sistema de coordenadas  $x = \{x^1, \dots, x^{n+1}\}$  que cubren una vecindad en un punto  $p \in \tilde{M}^{n+1}$  cuyas coordenadas son  $x_p^1 = \dots = x_p^{n+1} = 0$ . Entonces, diremos que  $\tilde{R}_{\alpha\beta}$  y  $\bar{R}_{\alpha\beta}$  son equivalentes si existe un difeomorfismo analítico local  $f : \tilde{M}^{n+1} \rightarrow \bar{M}^{n+1}$  en un punto  $p$  tal que*

$$\bar{R}_{\alpha\beta}(x^\gamma) = \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\beta} \tilde{R}_{\alpha\beta}(y^\lambda), \quad (2.1)$$

donde  $y^\lambda = \bar{f}^\lambda(x^\delta)$ . En otras palabras,  $\tilde{R}_{\alpha\beta}$  y  $\bar{R}_{\alpha\beta}$  se dice que son equivalentes si existe una función  $\bar{f}^\mu = \bar{f}^\mu(x^\alpha)$  tal que

- $|\frac{\partial \bar{f}^\mu}{\partial x^\alpha}| \neq 0$  para  $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ .
- La condicion anterior se mantiene en una vecindad  $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ . En este caso,  $(\tilde{M}^{n+1}, \tilde{g})$  y  $(\bar{M}^{n+1}, \bar{g})$  se dice que son espacios Ricci equivalentes.

**Definición 5** Se dice que una variedad  $M^n$  semi-Riemanniana es embebida en el conjunto  $C_\pi$  si hay al menos un miembro de  $C_\pi$ , digamos  $M^{n+k}$  donde  $M^n$  sea embebible.

Dadas las definiciones anteriores es posible ahora establecer el siguiente teorema que garantiza condiciones suficientes y necesarias para la existencia de un embebido local e isométrico de un espacio semi-Riemanniano  $n$ -dimensional  $(M^n, g)$  en el conjunto  $C_\pi^{n+1}$  del espacio  $(n+1)$ -dimensional semi-Riemanniano  $(M^{n+1}, \tilde{g})$  que satisface la propiedad  $\pi$  (esta propiedad no esta especificada por lo que puede ser cualquiera).

**Teorema II.1** Sea  $(M^n, g)$  una variedad semi-Riemanniana, y el conjunto

$$C_\pi^{n+1} = \{(M^{n+1}, \tilde{g}), \text{ donde se satisface la propiedad } \pi\} \quad (2.2)$$

y sea  $x = \{x^1, \dots, x^n\}$  un sistema de coordenadas que cubren una vecindad  $U$  en un punto  $p \in M^n$ . Las condiciones suficientes para un embebido local y analítico de  $M^n$  en un punto  $p$ , con el elemento diferencial de linea

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.3)$$

en  $C_\pi^{n+1}$  son

1. Que existan funciones analíticas

$$\bar{g}_{ij} = \bar{g}_{ij}(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) \quad (2.4)$$

$$\bar{\Phi} = \bar{\Phi}(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) \quad (2.5)$$

definidas en algún conjunto abierto  $D \subset X(U) \times \mathbb{R}$  que contiene el punto  $(x_p^1, \dots, x_p^n, 0)$  y que satisface las condiciones

- $\bar{g}_{ij} = \bar{g}_{ji}$ ,
- $\det(\bar{g}_{ij}) \neq 0$ ,

- $\bar{\Phi} \neq 0$ .

en  $D$ .

2. Además que

$$dS^2 = \bar{g}_{ij} dx^i dx^j + \epsilon \bar{\Phi}^2 dx^{n+1} dx^{n+1}, \quad (2.6)$$

donde  $\epsilon^2 = 1$ , sea un elemento diferencial de línea en una cierta vecindad de coordenadas  $V$  de la variedad  $M^{n+1} \in C_\pi^{n+1}$ .

El teorema anterior se refiere a  $\pi$  como una propiedad no especificada, es decir puede ser cualquiera, sin embargo en esta tesis nos referimos en específico a un universo semi-Riemanniano  $5D$  en un estado de vacío clásico es decir Ricci-Plano, por lo que enunciamos el siguiente teorema

**Teorema II.2 (Campbell-Magaard).** Sea  $M^n$  una variedad Semi-Riemanniana con  $n > 1$  y elemento diferencial de línea

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.7)$$

en un cierto sistema de coordenadas local que contiene a  $p \in M^n$  con  $x_p^1 = \dots = x_p^n = 0$ . Entonces para que exista una inmersión local y analítica de  $M^n$  en una vecindad de  $p$  de un espacio de  $(n+1)$ -dimensiones donde el tensor de Ricci es nulo, es suficiente que  $g_{ij}$  sean funciones analíticas en el punto  $0 \in \mathbb{R}$ .

La idea principal del teorema de Campbell-Magaard es que existe un sistema de coordenadas "adaptado" al embebido de tal manera que la imagen del embebido coincide con la hipersuperficie  $x^{n+1} = 0$  del espacio de embebidos y la condición de isometría se reduce a

$$\bar{\Phi} = \bar{\Phi}(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}), \quad (2.8)$$

y en cada punto de un espacio  $M^{n+1}$  arbitrario y semi-Riemanniano existe una vecindad de coordenadas donde la métrica tiene la forma

$$dS^2 = \bar{g}_{ij} dx^i dx^j + \epsilon \bar{\Phi}^2 (dx^{n+1})^2. \quad (2.9)$$

Consideremos ahora el mapeo  $l(y^1, \dots, y^n) = (y^1, \dots, y^n, 0)$  donde este mapeo determina un embebido de la hipersuperficie  $\Sigma_0$  definida por  $y^{n+1} = 0$  en  $M^{n+1}$  tal que

$$g_{\alpha\beta}(y^1, \dots, y^n) = \frac{\partial l^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial l^\nu}{\partial x^\beta} \tilde{g}_{\mu\nu} = \bar{g}_{\alpha\beta}(y^1, \dots, y^n, 0), \quad (2.10)$$

constituye un espacio semi-Riemanniano. Además la curvatura intrínseca de la hipersuperficie  $\Sigma_0$  están relacionadas por las ecuaciones de Gauss-Codazzi.

### 2.3. Ecuaciones de Campo

La teoría de la materia inducida, que fue desarrollada por Paul Wesson [13], considera como punto de partida una variedad diferenciable  $5D$  con el elemento diferencial de línea dado por

$$ds^2 = g_{AB}dx^A dx^B = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + \epsilon\Phi^2(dx^4)^2. \quad (2.11)$$

A partir de aquí definiremos los índices con letras mayúsculas y letras griegas para identificar respectivamente las coordenadas  $5D$  y  $4D$ , donde estos toman valores de 0 a 4 y de 0 a 3 respectivamente,  $x^0$  denota la coordenada tipo tiempo,  $x^k$  para  $k = 1, 2, 3$  son las coordenadas tipo espacio y  $x^4$  denota la coordenada extra. La representación matricial de la métrica (2.11) es dada por

$$g_{AB} \equiv \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & g_{4\alpha} \\ g_{\alpha 4} & g_{44} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \epsilon\Phi^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad g^{AB} \equiv \begin{pmatrix} g^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon}{\Phi^2} \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

donde  $\epsilon^2 = 1$ ,  $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^A)$  y  $\Phi = \Phi(x^A)$ . Las ecuaciones de campo 5D de la teoría de materia inducida (Figura 2.1) son

$$R_{AB} = 0, \quad (2.13)$$

donde se asume que la geometría en la variedad  $5D$  es Riemanniana. La ecuación (2.13) puede

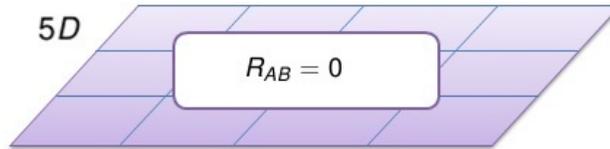


Figura 2.1: Estado de vacío clásico 5D.

descomponerse tomando los diferentes valores para los índices generando el sistema

$$\hat{R}_{\alpha\beta} = 0, \quad (2.14)$$

$$\hat{R}_{4\beta} = \hat{R}_{\alpha 4} = 0, \quad (2.15)$$

$$\hat{R}_{44} = 0, \quad (2.16)$$

donde  $\wedge$  indica que se trata de la parte 4D de una cantidad 5D.

Por otro lado, se sigue de la definición del tensor de Ricci en una base coordenada que

$$R_{AB} = (\Gamma_{AB}^C)_{,C} - (\Gamma_{AC}^C)_{,B} + \Gamma_{AB}^C \Gamma_{CD}^D - \Gamma_{AD}^C \Gamma_{BC}^D, \quad (2.17)$$

donde las comas denotan derivadas parciales con respecto a las coordenadas. Ahora la idea es que la variedad espacio-tiempo 5D puede ser foliada por una familia de hipersuperficies  $\Sigma : x^4 = cte$  y consecuentemente  $dim(\Sigma) = 4$  (Figura 2.2).

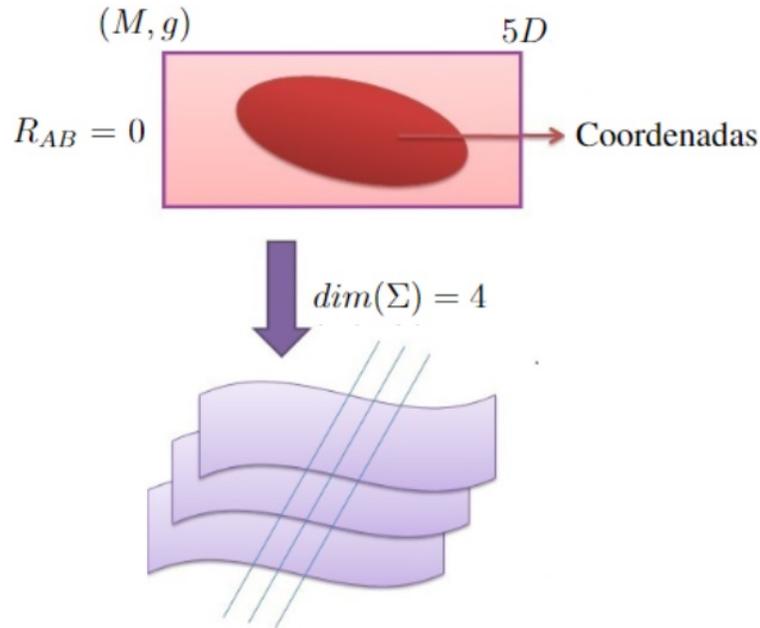


Figura 2.2: Embebido local e isométrico del espacio-tiempo 4-dimensional en un espacio 5-dimensional que nos da como resultado una familia  $\Sigma$  de hipersuperficies extrínseca no nula.

Ahora sustituyendo  $A \rightarrow \alpha$ ,  $B \rightarrow \beta$  y  $C \rightarrow \lambda$  en la ecuación (2.17) se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\alpha\beta} = & (\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\lambda)_{,\lambda} + (\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^4)_{,4} - (\hat{\Gamma}_{\alpha\lambda}^\lambda)_{,\beta} - (\hat{\Gamma}_{\alpha 4}^4)_{,\beta} + \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\lambda \hat{\Gamma}_{\lambda\mu}^\mu + \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\lambda \hat{\Gamma}_{\lambda 4}^4 \\ & + \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^4 \hat{\Gamma}_{4D}^D - \hat{\Gamma}_{\alpha\lambda}^\mu \hat{\Gamma}_{\beta\mu}^\lambda - \hat{\Gamma}_{\alpha\lambda}^4 \hat{\Gamma}_{\beta 4}^\lambda - \hat{\Gamma}_{\alpha 4}^D \hat{\Gamma}_{\beta D}^4. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Esta expresión puede ser rescrita en términos del tensor de Ricci 4D convencional en la forma

$$\hat{R}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} + (\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^4)_{,4} - (\hat{\Gamma}_{\alpha 4}^4)_{,\beta} + \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\lambda \hat{\Gamma}_{\lambda 4}^4 - \hat{\Gamma}_{\alpha\lambda}^4 \hat{\Gamma}_{4D}^D - \hat{\Gamma}_{\alpha\lambda}^4 \hat{\Gamma}_{\beta 4}^\lambda - \hat{\Gamma}_{\alpha 4}^D \hat{\Gamma}_{\beta D}^4. \quad (2.19)$$

Recordemos que los símbolos de Christoffel son dados por

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}). \quad (2.20)$$

Así la ecuación (2.19) nos lleva a

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\alpha\beta} = & R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{*44} g_{\alpha\beta}^* - \frac{1}{2} g^{44} g_{\alpha\beta}^{**} - \frac{1}{2} g^{44}_{,\beta} g_{44,\alpha} - \frac{1}{2} g^{44} g_{44,\alpha\beta} \\ & + \frac{1}{2} g^{44} g_{44,\lambda} \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}^* g^{44} g_{\alpha\beta}^* - \frac{1}{4} (g^{44})^2 g_{\alpha\beta}^* g_{44}^* \\ & + \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} g^{44} g_{\alpha\lambda}^* g_{\beta\mu}^* - \frac{1}{4} (g^{44})^2 g_{44,\alpha} g_{44,\beta}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde los asteriscos denotan derivadas parciales con respecto a la coordenada extra. Ahora utilizando el hecho de que

$$g_{44} = \epsilon \Phi^2, \quad g^{44} = \frac{\epsilon}{\Phi^2}, \quad \epsilon^2 = 1, \quad (2.22)$$

e introduciendo la notación

$$\Phi_{,\alpha} \equiv \Phi_\alpha \quad (2.23)$$

puede verificarse que

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}g^{44},_{\beta}g_{44,\alpha} - \frac{1}{2}g^{44}g_{44,\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{44}g_{44,\lambda}\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} - \frac{1}{4}(g^{44})^2g_{44,\alpha}g_{44,\beta} \\
&= \frac{2\Phi_{\alpha}\Phi_{\beta}}{\Phi^2} - \frac{\Phi_{\beta}\Phi_{\alpha} + \Phi\Phi_{\alpha,\beta}}{\Phi^2} + \frac{\Phi_{\lambda}\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}}{\Phi} - \frac{\Phi_{\alpha}\Phi_{\beta}}{\Phi^2} \\
&= -\frac{1}{\Phi}[\Phi_{\alpha,\beta} - \Phi_{\lambda}\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}] = -\frac{\Phi_{\alpha;\beta}}{\Phi}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Sustituyendo (2.24) en la ecuación (2.21) se obtiene

$$\hat{R}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{\Phi_{\alpha;\beta}}{\Phi} + \frac{\epsilon}{2\Phi^2} \left( \frac{\Phi^*g_{\alpha\beta}^*}{\Phi} - g_{\alpha\beta}^{**} + g^{\lambda\mu}g_{\alpha\lambda}^*g_{\beta\mu}^* - \frac{g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}^*g_{\alpha\beta}^*}{2} \right). \tag{2.25}$$

Realizando un procedimiento similar para las ecuaciones  $R_{4\alpha}$  y  $R_{44}$  respectivamente y utilizando la ecuación del tensor de curvatura 5D dado por la ecuación (2.17) se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
R_{4\alpha} &= \left( \frac{g^{\beta\lambda}g_{\lambda\alpha}^*}{2} \right),_{\beta} - \left( \frac{g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}^*}{2} \right),_{\alpha} + \left( \frac{g^{\mu\beta}g_{\mu\beta,\lambda}}{2} \right) \left( \frac{g^{\lambda\sigma}g_{\sigma\alpha}^*}{2} \right) - \left( \frac{g^{\lambda\beta}g_{\beta\mu,\alpha}}{2} \right) \left( \frac{g^{\mu\sigma}g_{\sigma\lambda}^*}{2} \right) \\
&\quad - \frac{g^{44}g_{44,\beta}}{2} \left( \frac{g^{\beta\lambda}g_{\lambda\alpha}^*}{2} - \frac{\delta_{\alpha}^{\beta}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}^*}{2} \right),
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$R_{44} = -\epsilon\Phi\Box\Phi - \frac{1}{2} \left( g^{*\lambda\beta}g_{\lambda\beta}^* + g^{\lambda\beta}g_{\lambda\beta}^{**} - \Phi g^{\lambda\beta}\dot{g}_{\lambda\beta} + \frac{1}{2}g^{\mu\beta}g^{\lambda\sigma}g_{\lambda\beta}^*g_{\mu\sigma}^* \right), \tag{2.27}$$

donde

$$\Box\Phi = g^{\mu\nu}\Phi_{\mu;\nu} = g^{\lambda\beta},_{\lambda}\Phi_{\beta} + g^{\lambda\beta}\Phi_{\beta,\lambda} + \frac{1}{2}g^{\lambda\beta}g^{\mu\sigma}g_{\mu\sigma,\lambda}\Phi_{\beta}, \tag{2.28}$$

define el operador D'Lambertiano del espacio tiempo. Ahora recordemos que la ecuación (2.13) implica las ecuaciones (2.14) y (2.16), entonces de las ecuaciones (2.25) y (2.27) obtenemos

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\Phi_{\alpha;\beta}}{\Phi} - \frac{\epsilon}{2\Phi^2} \left( \frac{\Phi^*g_{\alpha\beta}^*}{\Phi} - g_{\alpha\beta}^{**} + g^{\lambda\mu}g_{\alpha\lambda}^*g_{\beta\mu}^* - \frac{g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}^*g_{\alpha\beta}^*}{2} \right) \tag{2.29}$$

y

$$\epsilon\Phi\Box\Phi = -\frac{g^{*\lambda\beta}g_{\lambda\beta}^*}{4} - \frac{g^{\lambda\beta}g_{\lambda\beta}^{**}}{2} + \frac{\Phi^*g^{\lambda\beta}g_{\lambda\beta}^*}{2\Phi}, \quad (2.30)$$

respectivamente, donde el tensor  $R_{\alpha\beta}$  es el tensor de curvatura de Ricci  $4D$  inducido. Ahora notemos que

$$g^{\mu\beta}\dot{g}^{\lambda\sigma}\dot{g}_{\mu\sigma} + \dot{g}^{\mu\sigma}\dot{g}_{\mu\sigma} = 0. \quad (2.31)$$

Por otro lado recordemos que el escalar de curvatura de Ricci  $4D$  se define por

$$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}. \quad (2.32)$$

Así utilizando las ecuaciones (2.31) y (2.32), simplificando términos y tomando en cuenta que

$$(\delta_\nu^\mu)_{,4} = 0, \quad (2.33)$$

se sigue de (2.29) que

$$R = \frac{\epsilon}{4\Phi^2} \left[ g^{*\mu\nu}g_{\mu\nu}^* + (g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}^*)^2 \right]. \quad (2.34)$$

Ahora a partir de las ecuaciones (2.29) y (2.34) podemos definir el tensor energía-momento de materia inducida  $4D$  por

$$8\pi T_{\alpha\beta} = \frac{\Phi_{\alpha;\beta}}{\Phi} - \frac{\epsilon}{2\Phi^2} \left[ \frac{\Phi^*g_{\alpha\beta}^*}{\Phi} - g_{\alpha\beta}^{**} + g^{\lambda\mu}g_{\alpha\lambda}^*g_{\beta\mu}^* - \frac{g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}^*g_{\alpha\beta}^*}{2} + \frac{g_{\alpha\beta}}{4} \left( g^{*\mu\nu}g_{\mu\nu}^* + (g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}^*)^2 \right) \right]. \quad (2.35)$$

De esta forma las ecuaciones de campo inducidas en cada hipersuperficie miembro de la foliación son

$$G_{\mu\nu} = \frac{\Phi_{\mu;\nu}}{\Phi} - \frac{\epsilon}{2\Phi^2} \left[ \frac{\Phi^*g_{\mu\nu}^*}{\Phi} - g_{\mu\nu}^{**} + g^{\lambda\alpha}g_{\mu\lambda}^*g_{\nu\alpha}^* - \frac{g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^*g_{\mu\nu}^*}{2} + \frac{g_{\mu\nu}}{4} \left( g^{*\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^* + (g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^*)^2 \right) \right]. \quad (2.36)$$

Ahora retomando la ecuación (2.26) para  $R_{4\alpha}$  tenemos

$$\begin{aligned} \frac{R_{4\alpha}}{\sqrt{g_{44}}} &= \left( \frac{1}{2\sqrt{g_{44}}} (g^{\beta\lambda} g_{\lambda\alpha}^* - \delta_{\alpha}^{\beta} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}^*) \right)_{,\beta} + \left( \frac{g^{\mu\beta} g_{\mu\beta,\lambda}}{2} \right) \left( \frac{g^{\lambda\sigma} g_{\sigma\alpha}^*}{2} \right) - \\ &- \left( \frac{g^{\lambda\beta} g_{\beta\mu,\alpha}}{2} \right) \left( \frac{g^{\mu\sigma} g_{\sigma\lambda}^*}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.37)$$

La ecuación (2.37) sugiere introducir el siguiente tensor

$$P_{\alpha}^{\beta} \equiv \frac{1}{2\sqrt{g_{44}}} (g^{\beta\lambda} g_{\lambda\alpha}^* - \delta_{\alpha}^{\beta} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}^*), \quad (2.38)$$

cuya divergencia esta dada por la expresión

$$P_{\alpha;\beta}^{\beta} = (P_{\alpha}^{\beta})_{,\beta} + \Gamma_{\beta\mu}^{\beta} P_{\alpha}^{\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} P_{\mu}^{\beta}. \quad (2.39)$$

Así, puede mostrarse que se cumple que

$$\frac{R_{4\alpha}}{\sqrt{g_{44}}} = P_{\alpha;\beta}^{\beta}. \quad (2.40)$$

De (2.15) se sigue entonces la relación

$$P_{\alpha;\beta}^{\beta} = 0. \quad (2.41)$$

Esto tiene la apariencia de leyes de conservación para  $P_{\alpha}^{\beta}$ , donde la forma completamente covariante para (2.42) esta dado por

$$P^{\alpha\beta} = \frac{1}{2\sqrt{g_{44}}} (g_{\alpha\beta}^* - g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}^*), \quad (2.42)$$

$$P = \frac{-3g^{\lambda\sigma} g_{\lambda\sigma}^*}{2\sqrt{g_{44}}}. \quad (2.43)$$

Así, podemos decir que obtuvimos las ecuaciones de campo de la teoría de la relatividad general (2.36) en donde la materia es descrita por un tensor de energía-momento de carácter geométrico inducido desde un vacío 5D. Las ecuaciones (2.30), (2.36) y (2.42) son las ecuaciones de campo en la teoría de materia inducida.

## 2.4. Una solución cosmológica 5D

Una de las soluciones a las ecuaciones de campo 5D (2.13) que ha dado pie a formular modelos cosmológicos es la métrica de Ponce de León [1, 7, 11, 12]. Esta métrica describe un universo 5D Ricci plano y es dada por el elemento diferencial de línea

$$dS^2 = \psi^2 dt^2 - t^{\frac{2}{\alpha}} \psi^{\frac{2}{1-\alpha}} (dr^2 + r^2 d\Omega^2) - \alpha^2 (1 - \alpha)^{-2} t^2 d\psi^2, \quad (2.44)$$

donde  $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ ,  $x^0 = t$  corresponde a la coordenada tipo tiempo  $x^1, x^2, x^3 = r, \theta, \phi$  son las coordenadas tipo espacio y  $x^4 = \psi$  es la coordenada extra. Para  $\Sigma : \psi = \psi_0$  la métrica (2.44) se reduce a una del tipo Friedmann-Robertson-Walker con secciones espaciales 3D planas. Además  $\alpha$  es un parametro adimensional que esta relacionado con las propiedades de la materia. Considerando que el tensor de energía-momento inducido puede tomarse como el de un fluido perfecto con densidad  $\rho$  y presión  $p$ , se sigue de (2.44) que

$$8\pi\rho = \frac{3}{\alpha^2 \tau^2}, \quad (2.45)$$

$$8\pi p = \frac{2\alpha - 3}{\alpha^2, \tau^2} \quad (2.46)$$

donde  $\tau = \psi t$ . La ecuación de estado asociada esta dada por

$$p = \frac{2\alpha}{3 - 1} \rho. \quad (2.47)$$

Por otro lado,  $\alpha$  es un parametro adimensional que siguiendo la ecuación de estado nos indica que

- Si  $\alpha = \frac{3}{2}$  el factor de escala de (2.44) varia como  $t^{2/3}$ , la densidad  $\rho = \frac{1}{6\pi\tau^2}$  y la presión  $p = 0$  se obtiene el modelo estándar de polvo  $k = 0$  para el universo tardío.
- Si  $\alpha = 2$  el factor de escala varia como  $t^{1/2}$ ,  $\rho = \frac{3}{32\phi\tau^2} = 3p$  se obtiene el modelo estándar de radiación  $k = 0$  para el universo primitivo.
- Si  $\alpha < 1$  describe modelos inflacionarios del universo temprano.

Por otro lado, no es difícil ver que la métrica de Ponce de León (2.44) es equivalente a un espacio 5-dimensional de Minkowski con el elemento diferencial de línea dado de la siguiente manera

$$dS^2 = dT^2 - (dR^2 + R^2 d\Omega^2) - dL^2, \quad (2.48)$$

donde se implementaron las transformaciones de coordenadas

$$T(t, r, \psi) = \frac{\alpha}{2} \left[ \left( 1 + \frac{r^2}{\alpha^2} \right) t^{\frac{1}{\alpha}} \psi^{\frac{1}{1-\alpha}} - \frac{t^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}} \psi^{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}}}{1-2\alpha} \right], \quad (2.49)$$

$$R(t, r, \psi) = r t^{\frac{1}{\alpha}} \psi^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (2.50)$$

$$L(t, r, \psi) = \frac{\alpha}{2} \left[ \left( 1 - \frac{r^2}{\alpha^2} \right) t^{\frac{1}{\alpha}} \psi^{\frac{1}{1-\alpha}} - \frac{t^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}} \psi^{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}}}{1-2\alpha} \right]. \quad (2.51)$$

De esta manera la métrica de Ponce de León describe un espacio-tiempo difeomorfo a un espacio-tiempo de Minkowski.

Una vez estudiado los fundamentos de la teoría de materia inducida, estamos en posición de abordar la teoría de mundos brana. Ese es nuestro objetivo en el siguiente capítulo.

# Capítulo III

## Teoría de Mundo-Branas

La teoría de Mundo-Branas fue inspirada en la teoría de cuerdas. La teoría conocida como Mundos-Brana en realidad es un conjunto de modelos de branas, pero las primeras propuestas surgieron como una propuesta para resolver el problema de Jerarquía de las interacciones fundamentales del modelo estándar de física de partículas. En este capítulo daremos un breve recorrido por el problema de jerarquía, hablaremos del mundo Branas y finalmente obtendremos las ecuaciones de campo de dicha teoría.

### 3.1. Problema de Jerarquía

De acuerdo con el modelo estándar de partículas existen cuatro interacciones fundamentales en la naturaleza, a saber, la gravitacional, la fuerte, la débil y la electromagnética. Cada interacción se caracteriza por una escala de energía. Una característica importante es que la diferencia entre los valores de las escalas de energía para las interacciones fuerte, débil y electromagnética es aproximadamente del mismo orden, (Figura 3.1), sin embargo con la interacción gravitacional no sucede esto. Para la interacción electromagnética  $m_{em} \sim 10^{-4} GeV$ . Para la electrodébil  $m_{ew} \sim 10^3 GeV$ . Para la fuerte  $m_s \sim 10^6 GeV$ . Sin embargo, para la gravitacional  $m_{Pl} \sim 10^{19} GeV$ . Así, existe una enorme brecha la interacción gravitacional y el resto. La pregunta es porqué sucede esto. El dominio de interacción es inversamente proporcional a la escala de energía de cada interacción. Así a una escala determinada la interacción gravitacional es la más débil. Porqué la interacción gravitacional es mucho más débil que el resto. Y es así como surge la teoría de Branas como una propuesta para dar solución a este problema de Jerarquía.

Una Brana  $\Sigma$  es una hipersuperficie  $4D$  dentro de un universo  $5D$  o Bulto (Figura 3.2). La idea

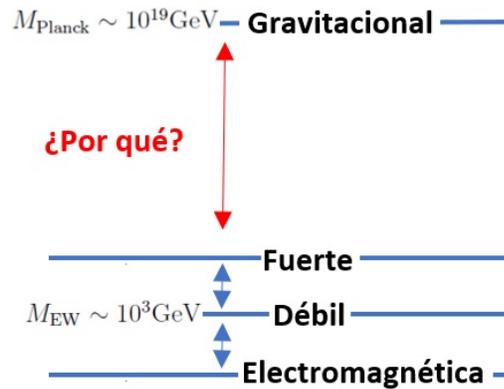


Figura 3.1: Problema de Jerarquía

es que las partículas fundamentales (la materia) y las interacciones fuerte y electrodébil se encuentran confinadas a la brana mientras que la gravedad escapa hacia el bulto. Este hecho significa que la gravedad es más débil porque una parte de ella escapa. Otra característica importante es que en los modelos de branas la quinta dimensión es compacta, a diferencia de lo que ocurre en la teoría de materia inducida en la cual esa dimensión extra se asume extendida.

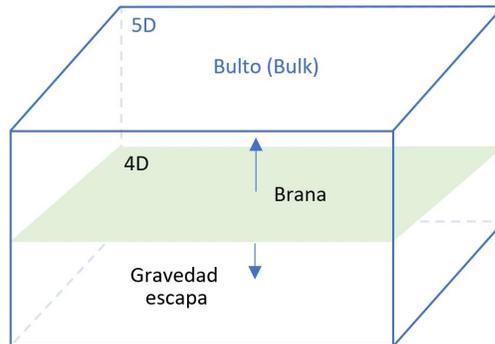


Figura 3.2: La gravedad escapa de la Brana

**Definición 6** Sea  $M$  una variedad (ó Bulto) 5-dimensional y  $\Sigma$  una hipersuperficie (ó Brana) 4-dimensional. Para cada punto de  $\Sigma$  se tiene una circunferencia interna  $\psi \in S^1$  de radio  $r$ , donde

$$r \sim r_{plank} \tag{3.1}$$

y  $\psi$  representa la quinta coordenada.

Una pregunta que surge de esta teoría es ¿La materia puede escapar hacia el bulto? La idea es que no pueda escapar y es así como surge el concepto de confinamiento donde los campos de materia deben de estar confinados a la Brana. Cuando sucede esto se genera una tensión en la Brana la cuál esta asociada a la Energía y esta descrito por el tensor energía momento.

## 3.2. Curvatura extrínseca

En el presente trabajo se han mencionado dos tipos de curvatura, la curvatura extrínseca e intrínseca. Sin embargo, hasta el momento no se ha dado gran detalle de ello, básicamente la diferencia que existe en estas dos tipos de curvaturas es que la curvatura intrínseca corresponde a la curvatura de Ricci que se mide dentro de la variedad y para la curvatura extrínseca se requiere del campo de vectores normales. En esta sección hablaremos de esto con mas detalle.

El tensor de curvatura extrínseca  $K$  es un tensor en la variedad  $M^n$  del tipo  $(0, 2)$ , definido hasta una ambigüedad de signo por

$$K_{\alpha\beta} = -\mathbf{e}_\beta \cdot \nabla_\alpha \mathbf{n} = -\mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{n}_{;\alpha}, \quad (3.2)$$

donde la derivada covariante se toma en el espacio  $M^{n+1}$  y

$$\mathbf{n} = n^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad (3.3)$$

es el vector normal unitario, además dicho vector es ortogonal a los vectores básicos  $e_\beta$  en la variedad  $M^n$  (Figura 3.3) tal que

$$(\mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{n})_{;\alpha} = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{n}_{;\alpha} = -\mathbf{e}_{\beta;\alpha} \cdot \mathbf{n}. \quad (3.4)$$

Se sigue entonces de las ecuaciones (3.2) y (3.4) que

$$K_{\alpha\beta} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_{\beta;\alpha} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = n^\gamma g_{\gamma\lambda} \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = n_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma. \quad (3.5)$$

Ahora introducimos un vector básico ortonormal en  $M^n$  y un vector normal unitario respectivamente

$$\mathbf{e}_{\hat{\alpha}} \in M^n, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_{\hat{n}} \quad \text{tal que} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \epsilon = \pm 1. \quad (3.6)$$

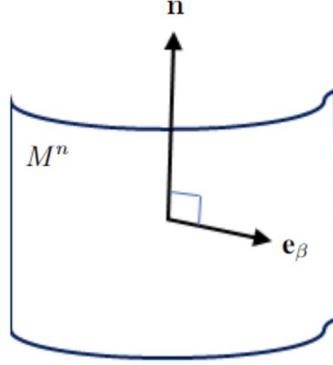


Figura 3.3: Vectores ortogonales en la variedad.

Así, obtenemos

$$K_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \Gamma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^{\hat{n}} \quad \text{y} \quad g_{\hat{n}\hat{n}} = \epsilon. \quad (3.7)$$

Cuando la conexión es simétrica la ecuación (3.5) muestra que la curvatura extrínseca es simétrica. Ahora queremos encontrar la relación entre el tensor de curvatura de Riemann o curvatura intrínseca en  $M^{n+1}$  y  $M^n$  con la curvatura extrínseca en  $M^n$ . Para lograr esto calcularemos el tensor de Riemann  $M^{n+1}$  proyectado sobre  $M^n$  dado por

$$\left(d^2\mathbf{e}_{\hat{\beta}}\right)_{\perp} = \left(\frac{1}{2}\tilde{R}_{\hat{b}\hat{a}\hat{\beta}}^{\hat{\lambda}}\mathbf{e}_{\hat{\lambda}} \otimes w^{\hat{a}} \wedge w^{\hat{b}}\right)_{\perp} = \frac{1}{2}\tilde{R}_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}}^{\hat{a}}\mathbf{e}_{\hat{a}} \otimes w^{\hat{c}} \wedge w^{\hat{d}}, \quad (3.8)$$

donde la tilde indica que estamos trabajando en  $(n + 1)$ -dimensiones. Otra forma de calcular  $\left(d^2\mathbf{e}_{\hat{\beta}}\right)_{\perp}$  es utilizando el tensor de Riemann en  $M^n$ ,

$$\left(d^2\mathbf{e}_{\hat{\beta}}\right)_{\perp} = \left(d\left[\mathbf{e}_{\hat{\alpha}} \otimes \Omega_{\hat{\beta}}^{\hat{\alpha}}\right]\right)_{\perp} = \mathbf{e}_{\hat{a}} \otimes \left(d\Omega_{\hat{b}}^{\hat{a}} + \Omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{a}} \wedge \Omega_{\hat{b}}^{\hat{\alpha}}\right)_{\perp}, \quad (3.9)$$

utilizando la segunda estructura de la ecuación de Cartan en  $M^n$  para la descomposición del producto wedge se puede mostrar que

$$\left(d^2\mathbf{e}_{\hat{\beta}}\right)_{\perp} = \frac{1}{2}\left(R_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}}^{\hat{a}} \pm K_{\hat{c}}^{\hat{a}}K_{\hat{b}\hat{d}}\right)\mathbf{e}_{\hat{a}} \otimes w^{\hat{c}} \wedge w^{\hat{d}}. \quad (3.10)$$

De las ecuaciones (3.8) y (3.10) llegamos a

$$R_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}}^{\hat{a}} = \tilde{R}_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}}^{\hat{a}} \pm 2K_{[\hat{c}}^{\hat{a}} K_{\hat{b}]\hat{d}}. \quad (3.11)$$

Además podemos escribir la ecuación (3.11) como

$$R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} = \tilde{R}_{BGD}^A g_A^{\mu} g_{\nu}^B g_{\rho}^G g_{\sigma}^D + K_{\rho}^{\mu} K_{\nu\sigma} - K_{\sigma}^{\mu} K_{\nu\rho}, \quad (3.12)$$

donde el lado izquierdo de la ecuación (3.12) es la proyección del tensor de Riemann en el espacio  $M^{n+1}$  y esta ecuación es conocida como la ecuación de Gauss, y donde hemos empleado la proyección del tensor métrico

$$g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \epsilon n_{\alpha} n_{\beta}. \quad (3.13)$$

Similarmente puede mostrarse que

$$K_{\mu;\nu}^{\nu} - K_{;\mu} = \tilde{R}_{AB} n^A g_{\mu}^B. \quad (3.14)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de Codazzi.

### 3.3. Condición de Unión de Israel

La condición de unión de Israel es básicamente una condición de continuidad de la métrica 5D al cruzar la brana. Para formularla es necesario considerar un espacio-tiempo separado por dos diferentes regiones tal que la unión de estas dos regiones sea toda la variedad y un perímetro en común, es decir

$$M = M^+ \cup M^- \quad y \quad \partial M^+ \cap \partial M^- = \Sigma, \quad (3.15)$$

respectivamente (Ver Figura 3.4). El elemento diferencial de línea para las dos regiones es dado por

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}^{\pm} dx_{\pm}^{\alpha} dx_{\pm}^{\beta}, \quad (3.16)$$

donde + y - significa que el tensor métrico corresponde a la variedad  $M^+$  o a la  $M^-$  respectivamente. El elemento diferencial de línea inducido en la hipersuperficie 3D  $\Sigma$  tiene la forma

$$d\sigma^2 = h_{ij} dx^i dx^j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.17)$$

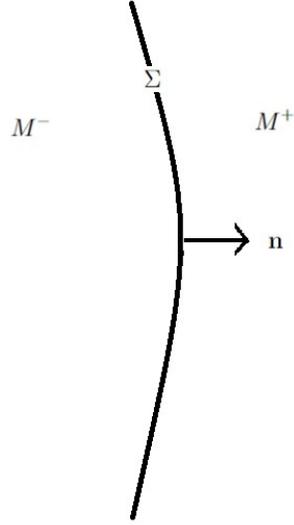


Figura 3.4: Espacio-tiempo dividido en dos regiones  $M^+$  y  $M^-$  por la hipersuperficie  $\Sigma$ .

Para las regiones de las variedades  $M^\pm$  las ecuaciones de campo respectivas son

$$E_{\alpha\beta}^\pm = kT_{\alpha\beta}^\pm, \quad (3.18)$$

donde  $E_{\alpha\beta}^\pm$  son los tensores de Einstein para cada subvariedad 5D. Se define el vector normal unitario  $\mathbf{n}$  a  $\Sigma$  como aquel que apunte de  $M^-$  a  $M^+$  cuya norma es dada por

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = g_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta \equiv \epsilon = \begin{cases} 1, & \text{si } \Sigma \text{ es tipo tiempo} \\ -1, & \text{si } \Sigma \text{ es tipo espacio.} \end{cases} \quad (3.19)$$

Utilizando los argumentos anteriores y las ecuaciones de Gauss (3.12) y Codazzi (3.42) se llega

a las expresiones

$$E_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta |^\pm = -\frac{1}{2}\epsilon\tilde{R} + \frac{1}{2}(K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu})^\pm, \quad (3.20)$$

$$E_{\alpha\beta} h_\mu^\alpha n^\beta |^\pm = \left(\tilde{\nabla}_\alpha K_\mu^\alpha - \tilde{\nabla}_\mu K\right)^\pm, \quad (3.21)$$

$$E_{\alpha\beta} h_\mu^\alpha h_\nu^\beta |^\pm = \tilde{E}_{\mu\nu} + \epsilon n^\alpha \nabla_\alpha (K_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}K)^\pm - 3\epsilon K_\mu \nu K |^\pm + \\ + 2\epsilon K_\mu^\alpha K_{\alpha\nu} + \frac{1}{2}\epsilon h_{\mu\nu} (K^2 + K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta})^\pm, \quad (3.22)$$

donde

$$K_{\alpha\beta}^\pm = \mathbf{n} \cdot \nabla_\alpha^\pm e_\beta = \epsilon n_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu |^\pm, \quad (3.23)$$

y la métrica inducida es dada por la proyección

$$h_{\alpha\beta}^\pm = g_{\mu\nu}^\pm - \epsilon n_\alpha^\pm n_\beta^\pm. \quad (3.24)$$

Para encontrar las ecuaciones análogas a las de campo de Einstein debemos de analizar como relacionar los tensores de curvatura con el tensor de energía-momento de acuerdo con las ecuaciones de campo de Einstein, donde el tensor energía-momento es discontinuo en  $\Sigma$  pero continuo en otras regiones y se requiere que el tensor métrico sea continuo en todo el espacio-tiempo, además el tensor de Einstein contiene segundas derivadas del tensor métrico, entonces la segunda derivada es dada por la función

$$\theta'(x) = \delta(x), \quad (3.25)$$

donde  $\theta$  es la función escalón definida como

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}. \quad (3.26)$$

Por lo tanto el tensor energía-momento mas general a través del limite es

$$T_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}\delta(y) + T_{\mu\nu}^+\theta(y) + T_{\mu\nu}^-\theta(-y), \quad (3.27)$$

donde  $y$  es una coordenada ortogonal tal que

$$\frac{\partial}{\partial y} = \mathbf{n} \quad \text{y} \quad y = 0 \text{ en la superficie } \Sigma. \quad (3.28)$$

El tensor energía-momento en la superficie  $S_{\mu\nu}$  puede ser definido como la integral sobre el espesor

$$S_{\mu\nu} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} T_{\mu\nu} dy, \quad (3.29)$$

donde  $\tau$  denota el espesor. Sin embargo, para que esto este bien definido, es necesario que el tensor  $S_{\mu\nu}$  se encuentre en la hipersuperficie  $\Sigma$  es decir,

$$h_{\alpha}^{\beta} h_{\beta}^{\nu} S_{\mu\nu} = S_{\alpha\beta}. \quad (3.30)$$

Esta forma de definir el tensor  $S_{\mu\nu}$  se le conoce como aproximación de capa fina. Utilizando las ecuaciones (3.22), (3.29) y (3.30) obtenemos

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E_{ij} dy = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \left[ \epsilon n^{\alpha} (K_{ij} - h_{ij} K)_{;\alpha} + U_{ij} \right] dy, \quad (3.31)$$

donde  $U_{ij}$  contiene términos cuadráticos en  $K_{\alpha\beta}$  y las tres curvaturas. De hecho este término esta acotado y el resto de la integral es una derivada total, por lo que se obtiene la siguiente expresión

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} E_{ij} dy = \epsilon ([K_{ij}] - h_{ij} [K] \cdot) \quad (3.32)$$

Así, se definen los siguientes operadores para el tensor  $T$  como

$$[T] \equiv T^+ - T^-, \quad (3.33)$$

$$\{T\} = \frac{1}{2} (T^+ + T^-). \quad (3.34)$$

Además se pueden demostrar las siguientes identidades

$$[TS] = [T] \{S\} + \{T\} [S], \quad (3.35)$$

$$\{TS\} = \{T\} \{S\} + \frac{1}{4} [T][S]. \quad (3.36)$$

Utilizando estas identidades en las ecuaciones de campo de Einstein se obtiene

$$[K_{ij}] - h_{ij}[K] = \epsilon k S_{ij}. \quad (3.37)$$

Esta ecuación es llamada la ecuación de Lanczos. Notemos también que los componentes restantes desaparecen, es decir

$$S_{nn} = S_{ni} = 0. \quad (3.38)$$

Una vez obtenidos todos estos resultados y contrayendo la ecuación (3.37) y sustituyendo en la misma, finalmente encontramos la siguiente ecuación

$$[K_{ij}] = k\epsilon \left( S_{ij} - \frac{1}{2} h_{ij} S \right). \quad (3.39)$$

Esta ecuación es conocida como la Condición de unión de Israel, que determina la discontinuidad de la curvatura extrínseca a través de la hipersuperficie  $\Sigma$ , y nos indica que la discontinuidad es dada por el tensor de energía-momento asociado a la materia definida en la brana  $\Sigma$ .

### 3.4. Ecuaciones de campo en Branas

Para obtener las ecuaciones de campo válidas sobre una brana seguiremos el formalismo descrito en [16]. Partiremos de un espacio-tiempo  $5D$  descrito por las ecuaciones de Einstein en vacío y con una constante cosmológica negativa. Así las ecuaciones de campo  $5D$  son

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} \hat{R} + \hat{\Lambda} g_{MN} = 0, \quad (3.40)$$

donde los índices en mayúscula y los gorros denotan que son cantidades  $5D$ . Por otro lado, recordemos que las ecuaciones de Gauss-Codazzi son dadas por

$$R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} = \hat{R}_{BGD}^A g_A^{\mu} g_{\nu}^B g_{\rho}^G g_S^D + K_{\rho}^{\mu} K_{\nu\sigma} - K_{\sigma}^{\mu} K_{\nu\rho}, \quad (3.41)$$

$$K_{\mu;\nu}^{\nu} - K_{;\mu} = \hat{R}_{ABn}^A g_{\mu}^B, \quad (3.42)$$

donde los índices griegos corren de 0 a 3,  $K = K_{\alpha}^{\alpha}$  es la traza de la curvatura extrínseca y el punto y coma denota derivada covariante en términos del tensor métrico inducido  $g_{\mu\nu}$ . De las ecuaciones

(3.40), (3.41) y (3.42) se obtiene la ecuación efectiva 4D

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\hat{\Lambda} + KK_{\mu\nu} - K_{\mu}^{\sigma}K_{\nu\sigma} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(K^2 - K^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta}) - E_{\mu\nu}, \quad (3.43)$$

donde los  $n^A$  son vectores normales ortogonales a la brana y

$$E_{\mu\nu} = \hat{C}_{AMBN}n^An^Bg_{\mu}^Mg_{\nu}^N, \quad (3.44)$$

es conocido como el tensor de Weyl. Además se cumple la condición de unión de Israel,

$$[K_{\mu\nu}] = -M^{-3}\left(S_{\mu\nu} - \frac{1}{3}g_{\mu\nu}S\right), \quad (3.45)$$

donde notemos que a diferencia de la ecuación (3.39) el factor  $1/2$  ha sido cambiado por  $1/3$ . Esto se debe a las 4-dimensiones de la brana e implica que  $g_i^i = 4$  y además que asumimos simetría espejo o  $\mathbb{Z}_2$ .  $M$  es un término de masa  $5D$  y el tensor  $S_{\mu\nu}$  ha sido definido por esta discontinuidad, además se muestra que está relacionado con el tensor energía-momento mediante

$$S_{\mu\nu} = -\lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}. \quad (3.46)$$

Aquí  $S_{\mu\nu}$  juega el papel de tensor energía-momento en la brana y  $\lambda$  representa la tensión de la brana que se genera por el confinamiento de la materia en la brana. A partir de las ecuaciones anteriores se puede construir la siguiente ecuación 4-dimensional

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} + 8\pi GT_{\mu\nu} + M^{-6}\prod_{\mu\nu} - \epsilon E_{\mu\nu}, \quad (3.47)$$

donde

$$\Lambda = \frac{1}{2}\left(\tilde{\Lambda} + \frac{1}{6}M^{-6}\lambda^2\right), \quad (3.48)$$

$$8\pi G = \frac{1}{6}M^{-6}\lambda, \quad (3.49)$$

$$\prod_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}T_{\mu\alpha}T_{\nu}^{\alpha} + \frac{1}{12}TT_{\mu\nu} + \frac{1}{8}g_{\mu\nu}T_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} - \frac{1}{24}g_{\mu\nu}T^2. \quad (3.50)$$

Además  $\Lambda$  dado por la ecuación (3.48) juega el papel de constante cosmológica  $4D$  en términos de la constante cosmológica  $5D$ ,  $G$  es la constante gravitacional, donde  $\prod$  y  $E_{\mu\nu}$  son las nuevas

contribuciones. Además se cumple la ley de conservación de la energía

$$T_{\mu;\nu}^{\nu} = 0, \quad (3.51)$$

y  $G_{\nu;\mu}^{\mu}$  implica

$$E_{\nu;\mu}^{\mu} \equiv \left(M_P^{(5)}\right)^{-6} \prod_{\mu;\nu}^{\mu}, \quad (3.52)$$

donde las ecuaciones (3.47), (3.51) y (3.52) son las ecuaciones de campo para la brana, siendo la ecuación (3.47) análoga a las ecuaciones de Einstein con nuevas contribuciones. La ecuación (3.51) es una ecuación de conservación y en la ecuación (3.52) podemos observar como se relacionan las nuevas contribuciones de las ecuaciones análogas a las ecuaciones de Einstein.

# Capítulo IV

## Equivalencia entre las diferentes teorías

En este capítulo mostraremos que existe una equivalencia entre las ecuaciones de campo 4D obtenidas en la teoría de materia inducida y aquellas obtenidas en una teoría de la relatividad general formulada en una geometría de Weyl-Integrable. Adicionalmente, como ya existe una equivalencia entre la teoría de materia inducida y la teoría de branas, entonces la equivalencia entre branas y una teoría de la relatividad general en una geometría de Weyl-Integrable se muestra como una extensión de la equivalencia original. Este capítulo contiene los resultados originales de esta investigación doctoral.

### 4.1. Equivalencia gravitación con geometría de Weyl-Integrable y Materia Inducida

En esta sección mostraremos que existe una equivalencia entre las ecuaciones de campo obtenidas en una teoría de la relatividad general formulada en una geometría de Weyl integrable (1.32) y las ecuaciones de campo 4D obtenidas en la teoría de materia inducida (2.36). La idea fundamental es que las correcciones a las ecuaciones de Einstein que provienen de considerar una dimensión extra no-compacta, pueden ser las mismas que aquellas generadas por la no-metricidad en una geometría de Weyl-Integrable. Con esta idea en mente se sigue entonces de (1.32) y (2.36) que para

lograr tal equivalencia debe cumplirse la condición

$$\left\{ \frac{\Phi_{\mu;\nu}}{\Phi} - \frac{\epsilon}{2\Phi^2} \left[ \frac{\Phi^* g_{\mu\nu}^*}{\Phi} - g_{\mu\nu}^{**} + g^{\lambda\alpha} g_{\mu\lambda}^* g_{\nu\alpha}^* - \frac{g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^* g_{\mu\nu}^*}{2} + \frac{g_{\mu\nu}}{4} \left( g^{*\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^* + (g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^*)^2 \right) \right] \right\} \Big|_{\psi=\psi_0} = \varphi_{\mu;\nu} - h_{\mu\nu} \square \varphi + \frac{1}{2} \left[ \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} + \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \varphi_{,\gamma} \varphi^{,\gamma} \right] \quad (4.1)$$

Esta ecuación contiene las soluciones que muestran la equivalencia buscada y de ahí que la llamaremos ecuación de equivalencia. La idea es que dada una métrica 5D, solución de las ecuaciones de campo 5D de la teoría de materia inducida:  ${}^{(5)}R_{AB} = 0$ , ésta debe corresponder a un campo de Weyl  $\varphi$ . De esta manera dada la métrica 5D, decimos que la equivalencia existe si la ecuación (4.1) es soluble para  $\varphi$ . En general no es una tarea fácil obtener soluciones para esta ecuación pues depende en gran medida de la métrica 5D. Sin embargo, mostraremos que existen soluciones al menos para escenarios cosmológicos. Este será nuestro objetivo en la siguiente sección.

## 4.2. Una equivalencia cosmológica

Con la idea en mente de mostrar que existe una equivalencia a escala cosmológica entre la teoría de materia inducida y una teoría de la relatividad general formulada en una geometría de Weyl-Integrable, consideraremos la solución de las ecuaciones de campo 5D de la teoría de materia inducida conocida como métrica de Ponce de León la cual es dada por

$$dS^2 = \psi^2 dt^2 - t^{\frac{2}{\alpha}} \psi^{1-\frac{2}{\alpha}} [dx^2 + dy^2 + dz^2] - \alpha^2 (1 - \alpha)^{-2} t^2 d\psi^2, \quad (4.2)$$

donde  $t$  es la coordenada tipo tiempo,  $x, y, z$  son coordenadas cartesianas tipo espacio,  $\psi$  es la coordenada extra no-compacta tipo espacio y  $\alpha$  es un parámetro a determinarse dependiendo del modelo. Esta métrica es una solución de las ecuaciones de campo  ${}^{(5)}R_{AB} = 0$  que describe las épocas dominadas por radiación y materia en la evolución del universo. La representación matricial

para esta métrica tiene la forma

$$(g_{AB}) = \begin{bmatrix} g_{\alpha\beta}(x^A) & 0 \\ 0 & \epsilon\Phi^2(x^A) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \psi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t^{\frac{2}{\alpha}}\psi^{\frac{2}{1-\alpha}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t^{\frac{2}{\alpha}}\psi^{\frac{2}{1-\alpha}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t^{\frac{2}{\alpha}}\psi^{\frac{2}{1-\alpha}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha^2(1-\alpha)^{-2}t^2 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Sobre cada hipersuperficie miembro de la familia  $\Sigma : \psi = \psi_0 = cte.$ , la métrica inducida a partir de (4.2) se escribe

$$ds^2 = \psi_0^2 dt^2 - t^{\frac{2}{\alpha}} \psi_0^{\frac{2}{1-\alpha}} [dx^2 + dy^2 + dz^2]. \quad (4.4)$$

La representación matricial de la métrica inducida es entonces

$$(h_{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} \psi_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t^{\frac{2}{\alpha}}\psi_0^{\frac{2}{1-\alpha}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t^{\frac{2}{\alpha}}\psi_0^{\frac{2}{1-\alpha}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t^{\frac{2}{\alpha}}\psi_0^{\frac{2}{1-\alpha}} \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Comparando (2.11) con (4.2) vemos que

$$\epsilon = -1 \quad \text{y} \quad \Phi = \frac{\alpha t}{1-\alpha}. \quad (4.6)$$

Recordemos que

$$\Phi_{\alpha;\beta} = \Phi_{\alpha,\beta} - \Phi_{\lambda}\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}, \quad \text{donde} \quad \Phi_{\alpha,\beta} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\alpha}} \right). \quad (4.7)$$

Además, dado que  $\Phi$  depende únicamente del tiempo, entonces la derivada no-nula esta dada por

$$\dot{\Phi} = \frac{\alpha}{1-\alpha}, \quad (4.8)$$

donde el punto denota la derivada con respecto al tiempo. De esta manera las componentes temporal y espaciales, respectivamente, de la ecuación (4.1) son dadas por

$$\left\{ \frac{\Phi_{t;t}}{\Phi} - \frac{\epsilon}{2\Phi^2} \left[ \frac{\Phi^* g_{tt}^*}{\Phi} - g_{tt}^{**} + g^{tt} g_{tt}^* g_{tt}^* - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^* g_{tt}^* + \frac{1}{4} g_{tt} (g^{*\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^* + (g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^*)^2) \right] \right\}_{\psi=\psi_0} = \varphi_{t,t} - h_{t,t} \square \varphi + \frac{1}{2} \left[ \varphi_{,t} \varphi_{,t} + \frac{1}{2} h_{tt} \varphi_{,\gamma} \varphi^{,\gamma} \right] \quad (4.9)$$

$$\left\{ \frac{\Phi_{i;i}}{\Phi} - \frac{\epsilon}{2\Phi^2} \left[ \frac{\Phi^* g_{ii}^*}{\Phi} - g_{ii}^{**} + g^{ii} g_{ii}^* g_{ii}^* - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^* g_{ii}^* + \frac{1}{4} g_{ii} (g^{*\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^* + (g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^*)^2) \right] \right\}_{\psi=\psi_0} = \varphi_{i,i} - h_{i,i} \square \varphi + \frac{1}{2} \left[ \varphi_{,i} \varphi_{,i} + \frac{1}{2} h_{ii} \varphi_{,\gamma} \varphi^{,\gamma} \right]. \quad (4.10)$$

Se sigue de (4.7) que

$$\Phi_{\mu;\nu} = \Phi_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Phi_{\lambda} = -\frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} [g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}] \Phi_{\lambda}, \quad (4.11)$$

pero, tomando en cuenta que

- Si  $\lambda \neq 0 \rightarrow \Phi_{\lambda} = 0$
- Si  $\lambda = t \rightarrow \Phi_t = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ ,

se obtienen las siguientes relaciones

$$\Phi_{0;0} = 0 \quad y \quad \Phi_{i;i} = 0, \quad (4.12)$$

$$g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^* = 2 \left( \frac{4-\alpha}{1-\alpha} \right) \psi^{-1}, \quad (4.13)$$

$$g^{*\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^* = -4 \left( 1 + \frac{3}{(1-\alpha)^2} \right) \psi^{-2}, \quad (4.14)$$

$$g^{*\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^* + (g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^*)^2 = \frac{24(2-\alpha)}{(1-\alpha)^2} \frac{1}{\psi^2}, \quad (4.15)$$

$$\square\varphi = \psi_0^{-2} \left[ \ddot{\varphi} + \frac{3}{\alpha t} \dot{\varphi} \right] - \frac{1}{t^{\frac{2}{\alpha}} \psi^{\frac{2}{1-\alpha}}} (\nabla^2 \psi), \quad (4.16)$$

$$\varphi_\gamma \varphi^\gamma = \psi_0^{-2} \dot{\varphi}^2 - t^{-2/\alpha} \psi_0^{-2/(1-\alpha)} (\nabla\varphi)^2. \quad (4.17)$$

Sustituyendo las relaciones anteriores en la ecuaciones (4.9) y (4.10) se obtiene las siguientes ecuaciones respectivamente

$$\frac{3}{4} \dot{\varphi}^2 - \frac{3}{\alpha t} \dot{\varphi} + \left( \nabla^2 \varphi - \frac{1}{4} (\nabla\varphi)^2 \right) t^{\frac{-2}{\alpha}} \psi_0^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} = \frac{\lambda}{t^2}, \quad (4.18)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{\alpha t} \dot{\varphi} - \frac{1}{4} \dot{\varphi}^2 + \left( \frac{5}{12} (\nabla\varphi)^2 - \frac{2}{3} \nabla^2 \varphi \right) t^{\frac{-2}{\alpha}} \psi_0^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} = \frac{\gamma}{t^2}, \quad (4.19)$$

donde  $\lambda = \frac{3}{\alpha^2}$  y  $\gamma = 3\frac{\alpha-1}{\alpha^2}$ . Realizando una combinación de las ecuaciones (4.18) y (4.19) se obtiene la ecuación homogénea

$$\ddot{\varphi} + \frac{3(1+\gamma/\lambda)}{\alpha t} \dot{\varphi} - \frac{1}{4} (1+3\gamma/\lambda) \dot{\varphi}^2 + \left[ \left( \frac{5}{12} + \frac{1}{4} \frac{\gamma}{\lambda} \right) (\nabla\varphi)^2 - \left( \frac{2}{3} + \frac{\gamma}{\lambda} \right) \nabla^2 \varphi \right] t^{\frac{-2}{\alpha}} \psi_0^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} = 0. \quad (4.20)$$

Ahora resolveremos la ecuación (4.20) tomando en cuenta que debido al principio cosmológico  $\varphi = \varphi(t)$ . Introduciendo la función auxiliar  $u = \dot{\varphi}$ , la ecuación (4.20) se transforma en

$$u \frac{du}{d\varphi} + Au + Bu^2 = 0, \quad (4.21)$$

donde

$$A = \frac{3(1+\gamma/\lambda)}{\alpha t} \quad \text{y} \quad B = -\frac{1}{4} \frac{(3\gamma+\lambda)}{\lambda} \quad (4.22)$$

Resolviendo (4.21) para  $u$  obtenemos

$$u = \frac{1}{B} (e^{-B(\varphi+c_1)} - A), \quad (4.23)$$

siendo  $c_1$  una constante de integración. Se sigue entonces que la solución para  $\varphi$  es dada por

$$\varphi = \frac{1}{B} \ln \left[ \frac{1}{A} (1 - e^{-A(t+c_1)}) \right] + c_2, \quad (4.24)$$

donde  $c_2$  es una constante de integración. Sustituyendo los valores de  $A$  y  $B$  la ecuación (4.24) se escribe

$$\varphi = \frac{4}{3\alpha - 2} \ln \left[ \frac{t}{3} \left( 1 - e^{-\frac{3}{t}(t+c_1)} \right) \right] + c_2, \quad (4.25)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes de integración. Esto significa que los escenarios cosmológicos descritos por la métrica de Ponce de León en donde los efectos de la materia inducida son considerados, son equivalentes a un escenario cosmológico puramente 4D en ausencia de materia y en presencia de una no-metricidad determinada por el campo de Weyl (4.25).

### 4.3. Equivalencia empleando la métrica de Minkowski 5D

Consideremos un espacio de Minkowski 5D en coordenadas  $\{T, R, \theta, \phi, L\}$  con el elemento de línea

$$dS^2 = dT^2 - (dR^2 + R^2 d\Omega^2) - dL^2. \quad (4.26)$$

Esta métrica es otra solución de las ecuaciones de campo 5D de materia inducida. Para obtener una solución de la ecuación de equivalencia (4.1), emplearemos coordenadas cartesianas para la parte espacial de (4.26), así

$$dS = dT^2 - (dX^2 + dY^2 + dZ^2) - dL^2. \quad (4.27)$$

La representación matricial para (4.27) tiene la forma

$$(g_{AB}) \equiv \begin{bmatrix} g_{\alpha\beta}(x^A) & 0 \\ 0 & \epsilon\Phi^2(x^A) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

De esta manera la métrica inducida 4D sobre  $\Sigma : L = L_0 = cte.$  es

$$ds^2 = dT^2 - (dX^2 + dY^2 + dZ^2), \quad (4.29)$$

y su representación matricial esta dado por

$$(h_{ab}) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Ahora la ecuación (4.1) usando la métrica (4.27) y la métrica inducida (4.29) nos da para la componente tiempo-tiempo

$$\frac{1}{4}\nabla^2\varphi + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = 0. \quad (4.31)$$

Análogamente para las componentes tipo espacio-espacio obtenemos

$$3\ddot{\varphi} - 2\nabla^2\varphi + \frac{5}{2}(\nabla\varphi)^2 - \frac{3}{4}\dot{\varphi}^2 = 0. \quad (4.32)$$

La combinación de las ecuaciones (4.31) y (4.32) nos lleva a

$$\ddot{\varphi} + \frac{5}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{5}{2}(\nabla\varphi)^2 = 0, \quad (4.33)$$

cuya solución para  $\varphi = \varphi(t)$  es de la forma

$$\varphi = \frac{6}{5}\ln\left(\frac{5}{6}(t + k_2)\right) - k_1 \quad (4.34)$$

donde  $k_1$  y  $k_2$  son constantes de integración. La existencia de esta solución significa que un escenario métrico de Minkowski 5D en vacío es equivalente a uno 4D con una geometría de Weyl integrable en donde el campo de Weyl es dado por (4.34).

## 4.4. Equivalencia entre teoría de Materia Inducida y Teoría de Branas

En esta sección mostraremos que existe una equivalencia entre la teoría de Materia inducida y la teoría de mundo Branas. Como podemos observar en los capítulos anteriores a pesar de ser dos teorías 5D, estas teorías son distintas. Una de sus diferencias es que en la teoría de materia inducida la quinta dimensión se asume extendida a diferencia de mundo branadas donde es considerada compacta. Para lograr la transición entre estas dos teorías partiremos de las ecuaciones de campo dadas en la teoría de la materia inducida, de donde se pretende obtener ecuaciones análogas a las ecuaciones de teoría de Branadas. Recordemos que las ecuaciones de campo para materia inducida son

$$\epsilon \Phi \square \Phi = -\frac{g^{*\lambda\beta} g_{\lambda\beta}^*}{4} - \frac{g^{\lambda\beta} g_{\lambda\beta}^{**}}{2} + \frac{\Phi^* g^{\lambda\beta} g_{\lambda\beta}^*}{2\Phi}, \quad (4.35)$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{\Phi_{\mu;\nu}}{\Phi} - \frac{\epsilon}{2\Phi^2} \left[ \frac{\Phi^* g_{\mu\nu}^*}{\Phi} - g_{\mu\nu}^{**} + g^{\lambda\alpha} g_{\mu\lambda}^* g_{\nu\alpha}^* - \frac{g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^* g_{\mu\nu}^*}{2} + \frac{g_{\mu\nu}}{4} \left( g^{*\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^* + (g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^*)^2 \right) \right], \quad (4.36)$$

$$P_{\alpha;\beta}^\beta = 0, \quad (4.37)$$

donde

$$P_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\Phi} (g_{\alpha\beta}^* - g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}^*). \quad (4.38)$$

Recordemos que el asterisco denota derivadas parciales con respecto a la quinta coordenada. Como podemos observar estas ecuaciones se evalúan en la hipersuperficie 4D para  $x^4 = \varphi = \varphi_0 = cte.$ , que se identifica con el espacio-tiempo físico  $\Sigma$ .

Una vez obtenidas las ecuaciones 4D con contribuciones de la dimensión extra, observemos que

la ecuación (4.36) es análoga a las ecuaciones de Einstein, y el lado derecho se puede expresar en términos de cantidades geométricas. Para ello introducimos el vector normal ortogonal al espacio-tiempo representado por la hipersuperficie  $\Sigma$ , donde

$$n^A = \delta_4^A / \Phi \quad (4.39)$$

y

$$n_\alpha = (0, 0, 0, 0, \epsilon \Phi). \quad (4.40)$$

Por otro lado, las primeras derivadas parciales de la métrica con respecto a la quinta coordenada  $\psi$  se pueden interpretar en términos de la curvatura extrínseca de la hipersuperficie  $\Sigma$  dada por

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\Phi} g_{\alpha\beta}^* \quad (4.41)$$

donde

$$K_{A4} = 0, \quad K_\lambda^\lambda = (g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^* / 2\Phi), \quad (4.42)$$

y

$$K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} = -(g^{*\mu\nu} g_{\mu\nu}^* / 4\Phi^2) \quad K_{\nu\alpha} K_\nu^\alpha = (g_{\nu\alpha}^* g_{\mu\rho}^* g^{\rho\alpha} / 4\Phi^2). \quad (4.43)$$

Para obtener la segunda derivada con respecto a la quinta coordenada, es necesario evaluar el tensor de Riemann contravariante dado por  ${}^{(5)}R_{\mu 4\nu 4}$ , así se obtiene

$${}^{(5)}R_{\mu 4\nu 4} = -\epsilon \Phi \Phi_{\mu;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^{**} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^* \frac{\Phi^*}{\Phi} + \frac{1}{4} g^{\rho\sigma} g_{\rho\mu}^* g_{\sigma\nu}^*. \quad (4.44)$$

Una vez obtenidos estos resultados y utilizando la ecuación (4.36) análoga a las ecuaciones de Einstein dada en materia inducida podemos obtener la siguiente ecuación

$${}^{(4)}G_{\mu\nu} = \epsilon \left[ K_\alpha^\alpha K_{\mu\nu} - K_{\mu\alpha} K_\nu^\alpha + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} - (K_\alpha^\alpha)^2) - E_{\mu\nu} \right], \quad (4.45)$$

donde

$$E_{\mu\nu} = \frac{{}^{(5)}R_{\mu 4\nu 4}}{\Phi^2}. \quad (4.46)$$

Ahora podemos observar que la ecuación (4.45) es análoga a las ecuaciones efectivas  $4D$  de la

teoría de branas dada por la ecuación (3.43) pero sin el término de la constante cosmológica. Tomando la cantidad tensorial dada en la ecuación (4.38) y utilizando la ecuación (4.41) obtenemos

$$P_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}K. \quad (4.47)$$

Utilizando la condición de unión de Israel

$$K_{\alpha\beta|\Sigma^+} = -K_{\alpha\beta|\Sigma^-} = -\frac{1}{2}k^2 \left( S_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}g_{\alpha\beta}S \right), \quad (4.48)$$

la ecuación (4.47) se transforma en

$$P_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}k^2 S_{\alpha\beta} \quad (4.49)$$

donde  $k$  es una constante de acoplamiento asociada a la materia y fue introducida por razones dimensionales y  $S_{\alpha\beta}$  representa el tensor energía-momento en la brana. Así, se propone la separación

$$S_{\mu\nu} = -\lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}. \quad (4.50)$$

Se sigue entonces de (4.49) y (4.50) que

$$P_{\alpha\beta} = \frac{k^2}{2}(-\lambda g_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta}). \quad (4.51)$$

Consecuentemente

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2}k \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}g_{\mu\nu}(T - \lambda) \right), \quad (4.52)$$

donde  $\lambda$  denota la tensión en la brana. De esta manera la ecuación (4.50) nos relaciona el tensor energía-momento de la brana con el el tensor energía momento total  $T_{\alpha\beta}$ , mientras que la ecuación (4.52) nos relaciona el tensor energía-momento total con la curvatura extrínseca, y de esta manera con el tensor de energía-momento de materia inducida, que también esta dado en términos de la curvatura extrínseca.

Una vez obtenida la relación entre la curvatura extrínseca y el tensor energía momento  $T_{\alpha\beta}$

sustituimos ésta en la ecuación (4.45) y obtenemos

$${}^{(4)}G_{\mu\nu} = -\Lambda_{(4)}g_{\mu\nu} + 8\pi G_N T_{\mu\nu} + \epsilon k_{(5)}^4 \prod_{\mu\nu} -\epsilon E_{\mu\nu}, \quad (4.53)$$

donde

$$\Lambda_{(4)} = \epsilon \frac{\lambda^2 k_{(5)}^4}{12}, \quad (4.54)$$

$$8\pi G_N = \epsilon \frac{\lambda k_{(5)}^4}{6}, \quad (4.55)$$

con

$$\prod_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}T_{\mu\alpha}T_{\nu}^{\alpha} + \frac{1}{12}TT_{\mu\nu} + \frac{1}{8}g_{\mu\nu}T_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} - \frac{1}{24}g_{\mu\nu}T^2. \quad (4.56)$$

Notemos ahora que al realizar la derivada covariante de la ecuación de campo (4.53), es decir  $G_{\nu;\mu}^{\mu} = 0$  se obtiene la siguiente ecuación

$$E_{\nu;\mu}^{\mu} = k^4 \prod_{\nu;\mu}^{\mu}. \quad (4.57)$$

donde podemos observar que se relacionan las nuevas contribuciones y de la ecuación de conservación (4.37) para materia inducida y utilizando la ecuación (4.50)

$$T_{\nu;\mu}^{\mu} = 0. \quad (4.58)$$

Ahora podemos observar que las ecuaciones (4.53), (4.57) y (4.58) que provienen de las ecuaciones de Materia Inducida son equivalentes al conjunto original de las ecuaciones dinámicas en la Brana (3.47) (3.51) (3.52), es decir, se acaba de demostrar que existe una transición entre estas dos teorías por medio de la curvatura extrínseca. Por tanto, las soluciones de la teoría de branas son equivalentes a las de la teoría de materia inducida y por tanto también lo son con las soluciones de una teoría de la relatividad general formulada en una geometría de Weyl-Integrable, al menos, a escala cosmológica.

## CONCLUSIONES

En esta tesis doctoral se abordaron tres distintas teorías: la teoría de la materia inducida, la teoría de branas y una teoría de la relatividad general 4D formulada en una geometría de Weyl-Integrable. Las primeras dos teorías consideran la existencia de dimensiones extra, pero son distintas entre sí. En la teoría de materia inducida se considera un universo  $5D$  en un estado de vacío clásico con dimensión extra extendida, donde nuestro universo es representado por una hipersuperficie  $4D$  que se elige al tomar la quinta coordenada constante. Por otro lado en la teoría de branas, la cual surge como un intento de resolver el problema de jerarquía de las interacciones fundamentales del modelo estándar de partículas, se considera que nuestro universo es modelado por una hipersuperficie llamada brana en donde la gravedad escapa a un universo  $5D$  o bulto, caracterizado por una dimensión extra compacta.

A pesar de sus diferencias, se ha mostrado que las ecuaciones de campo de ambas teorías son equivalentes a través de la curvatura extrínseca. De esta manera los escenarios físicos derivados de las mismas son equivalentes. Sin embargo, un punto en contra de las teorías con dimensiones extra es que no hay evidencia experimental alguna de la existencia de éstas. De ahí que una gran parte de la comunidad científica ha perdido el interés en este tipo de teorías.

Por otro lado, sabemos que es posible formular una teoría de la relatividad general no solo en una geometría de Riemann, como se hace tradicionalmente, sino que en una geometría de Weyl-Integrable también es posible. La geometría de Weyl-Integrable considera una variedad diferenciable 4D con no metricidad. Y en ese sentido puede considerarse que la geometría de Weyl-Integrable es una generalización de la geometría Riemanniana. Las teorías  $5D$  antes mencionadas y la basada en una geometría de Weyl-Integrable no son iguales, en principio porque consideran dimensiones distintas además de geometrías diferentes.

Sin embargo, el resultado original y más importante derivado de la investigación doctoral plasmada en esta tesis es que mostramos que al menos a escala cosmológica la teoría de materia inducida y la teoría de branas son equivalentes a una teoría de la relatividad general formulada en una

geometría de Weyl-Integrable. Esto es de suma importancia a nivel teórico, pues si antes se pensaba en desechar las teorías en dimensiones extra por la falta de evidencia experimental de la existencia de dimensiones extra, con este resultado se hace evidente que las modificaciones a la gravedad 4D obtenidas desde escenarios 4D pueden perfectamente obtenerse en una teoría de la relatividad general formulada en una geometría de Weyl-Integrable, y así estos resultados no dependen de la existencia de dimensiones extra.

Finalmente, la interpretación física del campo de Weyl es dependiente del modelo gravitacional a tratar. En el caso de una teoría de la relatividad general como la tratada aquí el campo de Weyl que inicialmente forma parte de la estructura afín del espacio-tiempo, es decir, que es un campo geométrico, bajo la clase de observadores que miden la curvatura de Levi-Civita este campo se percibe como una energía de vacío u oscura que permea el espacio-tiempo, lo que estaría vinculado con posibles correcciones cuánticas a estas teorías de gravitación.

La búsqueda de equivalencias no-cosmológicas es totalmente factible pero es un tópico que queda como posible trabajo futuro, además de analizar el caso de equivalencias con geometrías no-riemannianas más generales.

# Bibliografía

- [1] Romero. C., Tavakol, R., Zalaletdinov. R. (1996). *The embedding of general relativity in five dimensions*. General Relativity and Gravitation, 28(3), 365-376.
- [2] Dahia, F., Romero C. (2002). *The embedding of the space-time in five dimensions: An extension of the campbell-Maggard theorem*. Journal of Mathematical Physics, 43(11), 5804-5814.
- [3] P. Wesson, (1998) *Space-Time-Matter*, 2da edición, World Scientific.
- [4] Randall L. Sundrum R. *An alternative to compactification*. Phys. Rev. Lett 83, Núm. 23.
- [5] Weyl H 1918 Sitz.ber., Deutsch. Akad. Wiss. Berli. 465 Weyl H 1952 Space, Time, Matter (New York: Dover)
- [6] C. Romero, *General relativity and Weyl geometry*, 2012 Class. Quantum Grav. 29 155015
- [7] Paul S. Wesson, (2006) *five-dimensional physics “Clasical and quantum consequences of Kaluza-Klein Cosmology”* ISBN 981-256-661-9.
- [8] Paul S. Wesson, *In defence of Campell’s Teorem as a frame frame for new physics* University of Waterloo, Waterloo, ontario N2L ·G1 Canada.
- [9] Paul S. Wesson, (1998) *Space-Time-Matter* 2da. edición World Scientific.
- [10] J. Ponce de Leon. (2001) *Equivalence between space-time-matter and brane world theories*.
- [11] Paul S. Wesson, Seahra, S.S. (2001) *Astrophys J.* 558,L75.
- [12] Seahra, S.S., Paul S Wesson, (2002) *Class.Quant. Grav.* 19, 1139.
- [13] Paul S. Wesson, Ponce de Leon, J. (1992) *J. Math. Phys.* 33,3883.

- [14] Yoonbai Kim, Chong Oh Lee, Ilbong Lee (2004) *Brane World of Warp Geometry: An Introductory Review* Korea, arXiv:hep-th/0307023v2.
- [15] G. Panatopoulos (2006) *Cosmological evolution in brane-worlds with large transverse dimension: Inflation and dark matter* Heraklion, Greece, arXiv:hep-ph/0604152 v2.
- [16] Yasunori Fujii, Kei-Ichi Maeda (2003) *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation* ISBN 0-511-04225-6 eBook (netLibrary) ISBN 0-521-81159-7 hardback.